复旦大学数学系主编

数学物理方程

谷超豪 李大潜 陈恕行
沈玮熙 秦铁虎 是嘉鸿
编

海科学技术出版社



上海科学技术出版社

统一书号：13119•1402
定 价： 1.80 元

数学物理方程

复旦大学数学系　主编

谷超豪　李大潜　陈恕行
沈玮熙　秦铁虎　是嘉鸿　编

上海科学技术出版社

责任编辑　张致中

数 学 物 理 方 程

复旦大学数学系　主编

谷超豪　李大潜　陈恕行
沈玮熙　秦铁虎　是嘉鸿　编

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所发行　上海东方印刷厂印刷
开本 850×1156 1/32　印张 9　字数 234,000
1987 年 4 月第 1 版　1987 年 4 月第 1 次印刷
印数：1—4,200
书号：13119·1402　　定价：1.80 元

序

多年以来，我系一直在尝试着对数学专业以及计算数学力学专业的教材进行改革.这项工作从六十年代一开始就着手进行了，在上海科学技术出版社的大力支持下，1960 年出版了一套试用教材，并在此基础上经过修订从 1962 年到 1965 年陆续出版了《数学分析》、《常微分方程》、《概率论与数理统计》、《数学物理方程》、《实变函数与泛函分析概要》等教材，为我系教材改革提供了一些经验. 当时就数学教材提出的一些问题，如理论联系实际和教学内容现代化等问题，在今天也仍然是有意义的.

1980 年，教育部颁发了部属综合性大学理科数学专业、计算数学专业的教学计划和各门课程的教学大纲。同时指出，执行教学计划和教学大纲应该体现“统一性和灵活性相结合的原则.”按照我们的体会，所谓统一性是指：教学计划和教学大纲是从总体上反映了教和学两个方面所应该达到的基本要求；而灵活性是指在具体实施时应该从实际情况出发，在不降低基本要求的前提下，有所创新和改革. 我们打算按照这一指导思想陆续编写一套教材.

要在教学计划和教学大纲的指导下编写出一套成熟的教材，实在不是一件轻而易举的事，它应该是一个长期努力的过程. 这次编写只是作为这个过程的又一个新的开端.

数学学科与某些别的学科不同，它的基础知识相对地来说是比较成熟和稳定的. 其中大量经典的内容，即使是按照现代科学技术的发展水平来看，也是必不可少的. 这是一个基本的事实，是我们编写时选材的重要依据. 但是我们还注意到，在各门基础课程的教材中应当防止片面追求自身的完备化，尽量根据每门课程在整个教学计划中的作用和地位以及学时的安排，作整体的考虑，使各门教材内容的深度和广度互相衔接，协调一致，既能和教学计

划中的安排相一致，又符合学生学习过程中由浅入深的认识规律。我们希望做到各门课程的教材，都能在教学计划规定的学时数内完成教学。

对某些经典的内容，我们尝试按现代数学的观点加以处理，使思想更严谨、陈述更明确简炼，并起到承上启下的作用。在进行这种尝试的时候，力求使这些处理方法能为大多数教师所接受，正确处理好具体和抽象、特殊和一般、实际和理论的辩证关系。

不断总结课堂教学的经验，是编好教材的前提之一，这次编写的教材，都经过多次的课堂教学实践。一般是先编成讲义，在教学过程中，检查交流，听取有关教师和学生的意见，不断改进，其目的是为了在保证教学要求的前提下，教师便于教，学生便于学。我们将按照各门教材在教学实践中的成熟程度，陆续交付出版。

编写一套适应于四个现代化发展需要的数学教材，是一项长期而又艰巨的任务。由于我们的水平有限，实践也还不够，教材中出现各种各样的缺点和错误在所难免，殷切期望专家和广大读者提出宝贵的意见，给予批评指正，使我们的教材编写工作，日趋成熟。

上海科学技术出版社的同志对于我们的教材建设多年来一直给予密切配合和大力支持，我们表示衷心的感谢。

复旦大学数学系

1982.4

编 者 的 话

本书是作为高等学校数学系“数学物理方程”基础课的教材而编写的. 根据“数学物理方程”这门课程的要求和特点，以及我们过去讲授这门课程的体验，在本书的指导思想和具体安排方面，我们有如下几点不够成熟的看法.

(1) 数学物理方程主要是指从物理学以及其他自然科学、技术科学中所产生的偏微分方程. 不论是方程的归结还是问题的提出都紧密地联系于所考察的物理模型，不少的求解方法及解的性质等等也都或多或少地可以从相应的物理模型中得到启示，而最后所得的解或所阐明的解的性质也要应用于具体的问题并同时经受检验. 因此，讲授这门课程，必须紧密地结合有关的物理模型，始终注意从中吸取丰富的养料，并不断注意增养同学在这方面的兴趣和能力，才能达到生动活泼、事半功倍的效果. 要这样做，不仅要有物理、力学等方面的必备的基础，而且还要有从物理模型出发归结为数学问题来进行研究(即建立数学模型)的能力. 这两方面，对同学来说，都是需要加以训练和培养的. 遗憾的是，这一点从教和学两方面都往往容易被忽视. 为了改变这一状况，我们在本书中相对地加重了这一方面的内容和训练，由此也可以更清楚地看到数学物理方程的确是数学联系实际的一个重要的桥梁.

(2) 要结合物理模型来讲授课程的内容，但又不能局限于具体的物理模型，还必须充分地发挥用数学方法进行抽象概括的威力，正确地处理好从具体到抽象、从特殊到一般的关系，才能将所得到的结论和方法用于更大范围中的现象和事物，起到举一反三的作用. 在本书中，我们在具体讨论热传导方程、波动方程及调和方程这三类典型方程之前，先在第一章中讲二阶线性偏微分方程的分类，从总体上说明这三类典型方程的特点；而在二、三、四章分

别讨论了这三类典型方程之后，在第五章不仅对它们的特点和性质进行分析比较，还从特征理论的角度对一般的二阶线性偏微分方程进行讨论，并指出了这三类典型方程分别代表了一般的二阶线性抛物型、双曲型及椭圆型方程的共性，希望能帮助读者开阔视野，起到通过典型来带动一般的效果.

(3) 数学物理方程的一个重要的任务是求解，而求解过程又往往比较复杂. 为了培养同学具有熟练求解问题的能力，应该要求他们平时认真地做练习，并给以切实的指导. 有一本书的作者这样说过："一本没有例题的教科书与一本有例题的教科书之间的区别，与同学会用一种语言看书与学会用一种语言讲话之间的区别一样". 我们希望同学在学习了这门课程后，能够用这种科学的语言来"讲话"，即能真正地用来解决一些实际问题，因此，在本书中除注意了习题的精选以外，还增设了一定数量的例题.

(4) 数学物理方程是一门发展相当迅速的学科，包含了非常丰富的内容. 本书重点讲授一些经典的材料，它们也是进一步学习与研究近代偏微分方程理论的必备的基础. 除此以外，我们还力图以比较粗略或简要的方式介绍与近代偏微分方程的研究密切有关的一些概念、内容和方法，如 δ 函数(第五章及附录三)、广义解(第七章)、对称双曲型方程组和能量积分方法(第六章)等，希望能成为读者进一步入门的一个向导. 至于偏微分方程的数值求解方法，由于它是另一门课程的主题，在本书中不应占有太大的比重，也不宜作过于具体的展开. 我们只着重强调数学物理方程的理论对其数值解法的指导作用，即指出有关的数值解法实际上是以对偏微分方程解的概念的不同理解为出发点的. 这对读者进一步学习、研究偏微分方程的数值解可望提供一个较好的指南.

对于实际的教学，如果使用本教材上一学期(每周三～四小时)的课程，建议可重点讲授第一章、第二章(连同附录一、二)、第三章、第四章(除去 §5)以及第五章的一小部分(主要是特征理论及三类典型方程的比较). 如果时间还有多余，则建议再讲第七章. 至于第六章以及第五章中的大部分内容(包括附录三)，则可以安

排作为同学课外阅读的材料或留作选修课的教材. 重要的是, 要安排足够的时间让同学多作一些练习, 使所学的知识真正地掌握和巩固.

本书的初稿曾印成讲义于1983年度第一学期用作复旦大学81级数学专业和计算数学专业学习本课程时的教材. 接着, 又在教学实践的基础上, 将初稿作了认真的增订和修改. 限于编者的水平和缺少充分的教学实践, 现在的定稿离开主观上想达到的要求还相距很远, 错误或不妥之处更在所难免, 恳切地期望同志们提出宝贵的意见.

编者
1985年11月

目　　录

第一章

引　论

本章在§1中介绍有关数学物理方程的一些基本概念及这门学科的概况，在§2中对二自变数的二阶线性偏微分方程讨论了分类及化标准型的问题.

§1 引　言

1.1 偏微分方程及其基本概念

客观世界中的物理量(例如温度，速度等等)一般是随时间及空间位置的变化而变化的，因此总可以用以时间坐标 t 及空间坐标 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 为自变数的函数 $u(t, x)=u(t, x_1, x_2, x_3)$ 来表示. 这些物理量的变化所服从的规律又往往用它们关于时间坐标及空间坐标的某些阶变化率之间的一些确定的关系式来表示，即可写为函数 u 关于 t 及 x_1, x_2, x_3 的某些阶偏导数之间的一些关系式. 例如，由热量平衡原理，一个均匀、各向同性传热体的温度分布函数 $u=u(t, x_1, x_2, x_3)$ 应该满足下面的关系式:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)=0 \quad (a>0 \text{ 常数}); \qquad (1.1)$$

由此，该物体的一个稳定的温度分布 $u=u(x_1, x_2, x_3)$ (即设温度不随时间 t 变化，达到稳定状态)就应满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0. \qquad (1.2)$$

此外，由牛顿第二定律可知，对于一根两端固定而张紧着的均匀弦，当它在平衡位置附近作微小横向振动时，其上各点的位移 $u=u(t, x)$ 应满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (a>0\ \text{常数})\tag{1.3}$$

等等. 这种包含未知函数及其偏导数的等式,统称为*偏微分方程*. 在不至引起误解的情况下, 在本书中有时也简称其为*方程*或*微分方程*.

一般地说,若自变数为 $x_1, x_2, \cdots, x_n\ (n\geqslant 2)$, 未知函数为 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$, 则关于 u 的偏微分方程的一般形式是

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, Du, \cdots, D^N u)=0,\tag{1.4}$$

其中 F 是其变元的已知函数, Du 简记 u 的一阶偏导数:

$$Du=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

而一般地, $D^k u\,(k=2, \cdots, N)$ 简记 u 的 k 阶偏导数:

$$D^k u=\left(\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},\ k_1+k_2+\cdots k_n=k,\quad k_1, \cdots, k_n\geqslant 0\ \text{整数}\right).\tag{1.5}$$

在偏微分方程中所含的未知函数 u 的偏导数的最高阶数, 称为偏微分方程的*阶数*. 于是,若 F 的确含有 $D^N u$, 则(1.4)的阶数为 N. 此外, 在自变数的个数 $n=1$ 时, (1.4)就化为一个常微分方程, 而偏微分方程则对应于 $n\geqslant 2$ 的情况.

什么是偏微分方程的解呢? 设 Ω 是自变数空间 $(x_1, \cdots, x_n)$ 中的一个区域, 如果 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$ 是在 Ω 中定义的足够光滑(例如 N 次连续可微)的函数, 且将它代入(1.4)式能使其在 Ω 中恒等地成立, 则称 u 是该方程在 Ω 中的一个经典意义下的解, 称为*经典解*. 以后可以看到, 偏微分方程的解的概念可以用各种各样的方法加以扩充, 但上述经典解的概念是最易于为人理解的, 也是本书中著重讨论的对象. 今后, 如无特殊需要, 我们就将经典解称为解.

在一些情况下, 未知函数的个数可以不止一个, 它们所满足的偏微分方程的个数也不止一个. 这样, 由若干个偏微分方程联立在一起, 就构成了*偏微分方程组*. 流体力学、弹性力学、电动力学等等的基本方程都是偏微分方程组. 在通常所遇到的偏微分方程组

中，方程的个数和未知函数的个数大都是相等的．但有时也会出现方程个数大于未知函数个数(超定)的情况，或是方程个数小于未知函数个数(欠定)的情况．

如果在一个偏微分方程(组)中，所有的未知函数及其一切偏导数都是线性地出现的，则称这个偏微分方程(组)为线性偏微分方程(组)；否则，就称为非线性偏微分方程(组)．线性偏微分方程(组)通常是比较易于进行研究的，已经对它建立了系统的理论，并不断在深入向前发展．而对非线性偏微分方程(组)的研究则一般要困难得多，解的性质和线性情形也有较大的不同，很难用一个统一的方法来加以处理，其研究往往更紧密地结合着相应的物理模型，用不同的方法来处理各种不同性质的问题．但是，很多意义重大的问题归结为非线性偏微分方程的研究(例如，流体力学方程组就是非线性的)，而且随着研究的深入，有些原先可以用线性偏微分方程来近似描述的问题，也必须考虑非线性项的影响，而化为非线性偏微分方程的问题．因此，从对线性方程的研究逐步发展到对非线性方程的研究，也是当前偏微分方程发展的一个重要的特点．

对于非线性偏微分方程(组)来说，为了深入研究的需要和说明的方便，还可以进一步区分出一些比较特殊的类型．如果所考察的非线性偏微分方程(组)对未知函数的一切最高阶偏导数是线性的，则称其为拟线性偏微分方程(组)．这时，方程(组)中含有未知函数的一切最高阶偏导数的部分，称为此方程(组)的主部(在线性方程(组)的情形，也可以类似地定义主部)．对于拟线性方程(组)，其主部中未知函数的最高阶偏导数前的系数除了可能依赖于自变数外，还可能依赖于未知函数及其较低阶的偏导数．特别，若这些系数只是自变数的函数，而和未知函数及其偏导数无关，则称此偏微分方程(组)为半线性偏微分方程(组)．

这样，例如说

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.6}$$

是一阶(常系数)的线性偏微分方程;

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.7}$$

是一阶拟线性方程; 哈密顿-雅科比 (Hamilton-Jacobi) 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \tag{1.8}$$

是一阶非线性方程, 其中 f 是一个已知的非线性函数; 而单复变解析函数 $F(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ $(z=x+iy)$ 的实部和虚部所满足的柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases} \tag{1.9}$$

是一阶(常系数)的线性偏微分方程组.

在二阶的情形, 方程(1.1)(称为热传导方程), 方程 (1.2) (称为调和方程或拉普拉斯(Laplace)方程)及方程(1.3)(称为弦振动方程)都是二阶常系数线性方程; 反应扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)=f(u) \tag{1.10}$$

是二阶的半线性方程; 而非线性弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right), \tag{1.11}$$

其中

$$k(v)=\frac{v}{\sqrt{1+v^2}},$$

则是二阶拟线性方程, 等等.

对高阶的方程及方程组, 也可以举出类似的例子来说明上述的概念. 例如描述色散波的 KdV (Korteweg-de Vrie) 方程

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0 \tag{1.12}$$

为三阶半线性方程, 等等.

1.2　数学物理方程的研究对象

偏微分方程理论的形成和发展是和物理学以及其他自然科

学、技术科学的发展密切相关，并且互相促进和推动的. 很多重要的物理、力学学科的基本方程本身就是偏微分方程. 偏微分方程理论的研究成果也常常用来描述、解释或预见各种自然现象，并被应用于各门科学和工程技术. 同时，偏微分方程的研究也和分析、几何、代数、拓扑等其他数学分支的发展紧密联系、互相推动. 因此，偏微分方程这门学科是数学理论和实际应用之间的一个重要的桥梁. 从这个意义上说，各种各样的偏微分方程，其作用和地位是不相同的，不应一视同仁地加以对待. 那些和物理学以及其他自然科学、技术科学密切有关的偏微分方程应该受到更多的重视，偏微分方程的实际发展状况也充分地反映了这一点. 所谓数学物理方程，就主要指从物理学以及其他自然科学、技术科学中所产生的偏微分方程，有时也包括与此有关的积分方程、微分积分方程，甚至常微分方程等.

容易理解，数学物理方程这个概念的内涵，不是一成不变，而是随着历史的发展而发展的. 微积分理论形成后不久，从十八世纪初开始，人们就开始结合物理、力学问题来研究偏微分方程. 最早研究的几个方程就是弦振动方程(1.3)、热传导方程(1.1)及调和方程(1.2). 其中弦振动方程是达朗贝尔(d'Alembert)，欧拉(Euler)，丹尼尔·贝努利(Daniel Bernoulli)等人首先系统加以研究的；对于二维或三维的波动现象(例如薄膜的振动和声音的传播)可以得到类似的方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=0 \quad (a>0\text{ 常数}) \tag{1.13}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)=0 \quad (a>0\text{ 常数}), \tag{1.14}$$

统称为波动方程. 傅立叶(Fourier)为了研究热传导问题首先引入了后来被称为傅立叶级数的数学方法，这不仅在物理学中很快得到广泛的应用，而对其数学基础的研究则吸引了十九世纪一些最伟大的数学家如狄利克雷(Dirichlet)、黎曼、维尔斯特拉斯(Weierstrass)及康托尔(Cantor)，并最终导致了集合论的问世，在分

析中引起了一场革命．至于调和方程，不仅可以用来表示稳定的温度场，而且可以用来表示牛顿引力场中的引力势、弹性薄膜的平衡、不可压缩流体的定常无旋流动等等；此外，单复变解析函数的实部和虚部也满足调和方程．这个例子生动地说明了一个事实：往往同一个偏微分方程可以用来描述性质上颇不相同的物理现象．这也显示了偏微分方程的理论研究成果得到广泛应用的可能性．这三个方程，即波动方程、热传导方程及调和方程，不仅来源于不同的物理模型，而且在数学上也具有各自的特点，它们分别是所谓的二阶双曲型方程、二阶抛物型方程及二阶椭圆型方程的最典型的代表．这三种类型的方程是最早的也是研究得最充分的数学物理方程．

随着力学、物理学的发展，到了十八世纪后期，在连续介质力学中，利用质量、动量及能量的守恒律，已能将流体的运动规律用一组偏微分方程来表示．在考虑到流体的粘性时，它称为纳维-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程组；而在不计流体的粘性时，则称为欧拉方程组．它们都是拟线性的方程组，在此时期，弹性体的运动规律也能用弹性力学方程组或称圣维南(Saint Venant)方程组来表示；它是一个线性的偏微分方程组．到了十九、二十世纪，随着物理学的进一步发展，人们又陆续发现了描述电磁场运动规律的麦克斯韦尔 (Maxwell) 方程组(它是电动力学的基本方程组)，描述微观粒子运动规律的薛定谔 (Schrödinger) 方程及狄拉克 (Dirac)方程组(它们是量子力学的基本方程)，广义相对论中确定引力场的基本方程——爱因斯坦(Einstein)方程以及在基本粒子研究中有重大作用的规范场理论的基本方程——杨-米尔斯 (Yang-Mills) 方程等等．这些方程(组)扩大了数学物理方程研究的范围，在相应的力学、物理学科中都起着重要的作用．

此外，对辐射现象、中子迁移及气体分子运动的研究，又分别导至了辐射迁移方程、中子迁移方程和玻尔兹曼 (Boltzmann) 方程．它们都是微分积分方程，也是当前数学物理方程中的重要的研究对象．

不仅如此，由于物理现象的复杂性，往往是好几种过程同时发生，并且相互发生作用，这使相应的数学物理方程具有更加复杂的结构，并为数学物理方程开拓了愈来愈广阔的研究范围．例如化学反应过程和扩散过程的联合作用，就导至反应扩散方程；考虑带电流体在电磁场中的运动，就有*电磁流体力学方程组*，它是麦克斯韦尔方程组与流体力学方程组的耦合；考虑高温流体的运动状态时必须同时考虑辐射的影响，就导至*辐射流体力学方程组*等等．

近年来，在力学、物理学、化学、生物学以及一些社会科学学科中以及数学的一些其它分支(如整体微分几何学、多复变函数论……)中又不断地归结出一些新的重要的偏微分方程(组)，使数学物理方程的研究领域不断扩大，愈来愈得到人们的重视．同时，由于在数学物理方程中所面临的数学问题多样而复杂，所以不断促进着许多相关联的数学分支(如泛函分析、复变函数、微分几何、计算数学等)的发展．并从中引进了许多有力的数学工具来解决数学物理方程中的有关问题．

1.3 数学物理方程的研究内容

研究数学物理方程的中心问题自然是求解或是研究解的性质，以使我们能对于相应的自然现象有更深入的认识，甚至预见出新的自然现象；或者对于相应的工程设计能提供必要的数据，保证安全可靠并且高效率的完成任务．

但是，因为所考察的数学物理方程只反映了相应的物理现象中的一般规律，为了具体确定一个物理状态，即为了确定一个数学物理方程的解，单靠方程本身是不行的，还必需添加一定的附加条件，称为*定解条件*．例如，为了确定一个物体的温度分布状况，除了应利用热传导方程以外，还必须知道该物体的初始温度状况(*初始条件*)以及其在边界上的受热状况(*边界条件*)，这里的初始条件及边界条件就构成了所要求的定解条件．数学物理方程再加上相应的定解条件，就构成了一个*定解问题*．我们要求的将是定解问题的解，即要求一个适当光滑的函数，它不仅在所考察的区域中满足

微分方程，而且满足所给的定解条件.

我们将要看到，对于不同类型的数学物理方程，其定解条件以及定解问题的提法通常是不同的，这可以从相应的物理现象中得到解释，也能从数学的角度按照一定的准则来加以说明．这些准则常用的是*解的存在性*(即定解问题的解是否存在)，*解的唯一性*(即定解问题的解如果存在，是否只有一个，还是具有一定的自由度)以及解对于用来决定解的资料(例如初始条件、边界条件、方程中的已知函数甚至求解区域等等)的*连续依赖性*、简称*解的稳定性*(即在这些资料作很小的变化时，解的变化是否也相应地很小)．这三者统称为*定解问题的适定性*.

如果一个定解问题的解存在、唯一并连续地依赖于定解条件，则称这个定解问题是*适定的*．通常，对于决定性的现象来说，一个基本上正确地(但总是近似地)描述所考察的物理模型的微分方程定解问题，总应该是适定的．这是因为，所考察的物理模型在一定的条件下总应该具有唯一确定的状态，因此，相应的微分方程的定解问题的解应该是存在、唯一的．此外，因为在实际测量中误差总是不可避免的，如果例如说定解条件的微小误差会引起解的巨大变化，所考察的定解问题就不可能给出所考察的物理模型的那怕是近似的解，因而不可能正确地描述所考察的物理模型，而失去任何实际的意义．因此，在求解微分方程定解问题时，先对定解问题的适定性进行一定的考察，可以帮助我们初步判定所考察的定解问题是否合理，所附加的定解条件是否适当，以及使我们了解对怎样的微分方程通常应该提出怎样的定解条件，对求解起一定的指导作用．适定性的概念是阿达马(Hadamard)首先提出来的，对偏微分方程的研究曾起了并直到现在仍继续起着重要的指导作用．但是，对偏微分方程不能仅局限于研究定解问题的适定性，还要研究解的各种性质以及各种有效的求解方法等等．此外，现在已经知道有不少在应用上有重大意义的问题(例如在地球物理探矿中所提出的问题)是不适定的，对它们的研究也是很有意义的.

§2 二自变数的二阶线性方程的分类及标准型

在本书中，我们研究的重点将是象热传导方程、调和方程及波动方程那样一些二阶线性偏微分方程．这三个方程分别对应于不同的物理模型，在定解问题的提法、解的性质等方面具有许多不同的特点．现在我们考察二自变数的一般的二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f, \qquad (2.1)$$

其中 a_{ij}, b_i $(i, j=1, 2)$, c 及 f 都是自变数 (x, y) 在区域 Ω 中的连续可微函数，且 a_{11}, a_{12} 及 a_{22} 不同时为零．我们希望通过自变数的适当的可逆变换及未知函数的适当的可逆线性变换，将方程(2.1)的形式进行化简，并在此基础上对方程进行分类．由此可以看到前述的热传导方程、调和方程及波动方程恰恰对应于方程(2.1)的三种不同的类型，而且分别是它们的最典型的代表．顺便指出，这种通过自变数或未知函数的可逆变换将方程的形式化简的办法，在常微分方程中曾经大量使用过，它也是研究偏微分方程的一个常用的方法．

2.1 方程的化简

引入自变数变换

$$\xi=\xi(x, y), \quad \eta=\eta(x, y). \qquad (2.2)$$

假设 $\xi(x, y)$ 及 $\eta(x, y)$ 是二次连续可微函数，且雅科比行列式

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}=\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \qquad (2.3)$$

在区域 Ω 中的某一点 (x_0, y_0) 不为零．根据隐函数存在定理，变换 (2.2) 至少在 (x_0, y_0) 的一个邻域中是可逆的．现在试图利用这个变换将方程 (2.1) (至少在 (x_0, y_0) 的一个邻域中) 进行化简．

由复合函数的求导法则，有

$$
\begin{cases}
u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x, \\
u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y, \\
u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}, \\
u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y \\
\qquad +u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy}, \\
u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}.
\end{cases} \tag{2.4}
$$

于是，在变换(2.2)下，以 (x, y) 为自变数的方程 (2.2) 就化为如下的以 (ξ, η) 为自变数的方程：

$$
\bar{a}_{11}u_{\xi\xi}+2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta}+\bar{a}_{22}u_{\eta\eta}+\bar{b}_1u_\xi+\bar{b}_2u_\eta+\bar{c}u=\bar{f}, \tag{2.5}
$$

其中

$$
\begin{cases}
\bar{a}_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2, \\
\bar{a}_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y, \\
\bar{a}_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2,
\end{cases} \tag{2.6}
$$

而 $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{c}$ 及 $\bar{f}$ 的具体形式从略.

为了化简方程，要适当选择变换(2.2)，使方程(2.5)的主部能化成最简单的形式. 由于 (2.6) 中的第三式和第一式的形式完全相同，仅仅是将第一式中的 ξ 换成了 η，因此，如果能求得方程

$$
a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2=0 \tag{2.7}
$$

的两个函数无关的解 $\varphi=\varphi_1(x, y)$ 及 $\varphi=\varphi_2(x, y)$，就可将变换(2.2)取为

$$
\begin{cases}
\xi=\varphi_1(x, y), \\
\eta=\varphi_2(x, y),
\end{cases} \tag{2.8}
$$

从而在方程(2.5)中，系数 $\bar{a}_{11}$ 及 $\bar{a}_{22}$ 均化为零，而其主部仅包含一项 $2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta}$，这就使方程(2.1)的形式得到极大的简化. 下面来具体考察这种做法的可能性.

方程(2.7)是关于 φ 的一阶非线性偏微分方程，它的求解可以化为求解如下的常微分方程：

$$
a_{11}dy^2-2a_{12}dx\,dy+a_{22}dx^2=0 \tag{2.9}
$$

在 (x, y) 平面上的积分曲线问题.

事实上，若 $\varphi(x, y)=C$ 是常微分方程 (2.9) 的一个初积分，

它表示一族积分曲线，且成立 $\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq 0$（即不考虑奇点），则由于沿其中的任一积分曲线成立

$$\varphi_x dx+\varphi_y dy=0, \tag{2.10}$$

从而由(2.9)式可得沿其中的任一积分曲线成立(2.7)式；再注意到积分曲线族 $\varphi(x, y)=C$ 充满 (x, y) 平面上的一个区域，于是 $\varphi=\varphi(x, y)$ 是偏微分方程 (2.7) 的一个解。反之，也容易证明，若 $\varphi=\varphi(x, y)$ 是偏微分方程(2.7)的一个解，且成立 $\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq 0$，则 $\varphi(x, y)=C$ 必为常微分方程(2.9)的一个初积分，在 (x, y) 平面上表示一族积分曲线.

我们称方程(2.9)为方程(2.1)的**特征方程**，并称其积分曲线为方程(2.1)的**特征线**.

为了求方程(2.9)的积分曲线，记

$$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}. \tag{2.11}$$

由(2.6)式不难证明，在自变数可逆变换(2.2)下，若记

$$\bar{\Delta}=\bar{a}_{12}^2-\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}, \tag{2.12}$$

则成立

$$\bar{\Delta}=\Delta J^2, \tag{2.13}$$

其中

$$J=\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}$$

为变换的雅科比行列式. 因此，Δ 的符号是自变数可逆变换下的不变量.

现在分以下几种情形分别进行讨论：

(1) 在点 (x_0, y_0) 的一个邻域中 $\Delta>0$. 此时方程(2.9)可分解为如下的两个不同的实方程

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \end{cases} \tag{2.14}$$

由常微分方程的存在定理，相应地存在着两族不相同的实积分曲线 $\varphi_1(x, y)=C$ 及 $\varphi_2(x, y)=C$；且由 (2.10)、(2.14) 式可知变换

$$\begin{cases}\xi=\varphi_1(x,\ y),\\ \eta=\varphi_2(x,\ y)\end{cases}\tag{2.15}$$

的雅科比行列式不等于零. 由上述, 此可逆变换可将方程(2.5)中的 $\overline{a}_{11}$ 及 $\overline{a}_{22}$ 化为零. 再注意到可逆的自变数变换决不能将一个二阶偏微分方程退化为一个一阶偏微分方程, 因此此时必成立 $\overline{a}_{12}\neq 0$ (这一点也可从(2.13)式得出). 于是此时(2.5)可化为

$$u_{\xi\eta}=Au_\xi+Bu_\eta+Cu+D\tag{2.16}$$

的形式, 其中 A、B、C、D 均为 ξ, η 的已知函数, 其具体表达式从略.

如果在(2.16)中再作自变数的可逆线性变换

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{1}{2}(s+t),\\ \eta=\dfrac{1}{2}(s-t),\end{cases}\tag{2.17}$$

则方程(2.1)就化为

$$u_{ss}-u_{tt}=A_1u_s+B_1u_t+C_1u+D_1\tag{2.18}$$

的形式, 其中 A_1, B_1, C_1, D_1 为 s, t 的已知函数. 特别在 A_1, B_1, C_1, $D_1\equiv0$ 时, 就得到弦振动方程.

(2) 在点 $(x_0,\ y_0)$ 的一个邻域中 $\Delta\equiv0$. 此时 a_{11} 及 a_{22} 必同号, 不妨设 a_{11}, $a_{22}>0$ (否则用 -1 乘方程(2.1)的两端就化为所考察的情形), 而(2.9)化为一个一阶实方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}}{a_{11}},\tag{2.19}$$

因此, 只有一族实特征曲线, 记为 $\varphi_1(x,\ y)=C$. 取 $\xi=\varphi_1(x,\ y)$, 再适当选一个函数 $\eta=\varphi_2(x,\ y)$, 使 φ_2 与 φ_1 函数无关, 则作变换

$$\begin{cases}\xi=\varphi_1(x,\ y),\\ \eta=\varphi_2(x,\ y),\end{cases}$$

就有 $\overline{a}_{11}\equiv0$. 但由于此时 $\Delta\equiv0$, 由 (2.13) 式, 有 $\overline{\Delta}\equiv0$, 从而也有 $\overline{a}_{12}\equiv0$. 这样, 就可将方程(2.1)化为

$$\overline{a}_{22}u_{\eta\eta}=Au_\xi+Bu_\eta+Cu+D$$

的形式. 由于此时 $\overline{a}_{22}$ 一定不为零, 故方程就化为

$$u_{\eta\eta}=A_1u_\xi+B_1u_\eta+C_1u+D_1 \tag{2.20}$$

的形式，其中 A_1, B_1, C_1, D_1 为 (ξ, η) 的已知函数.

在方程(2.20)中，还可再作未知函数的可逆线性变换

$$v=ue^{-\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta}B_1(\xi,\tau)d\tau}, \tag{2.21}$$

就得到关于 v 的方程

$$v_{\eta\eta}=A_2v_\xi+C_2v+D_2, \tag{2.22}$$

其中不再出现对 η 的一阶偏导数项. 特别在 $A_2\equiv1$, C_2, $D_2\equiv0$ 时，就得到热传导方程.

(3) 在点 (x_0, y_0) 的一个邻域中 $\Delta<0$. 此时不存在实的特征线，方程(2.9)的初积分如果存在只能是复的函数. 假设

$$\varphi(x, y)=\varphi_1(x, y)+i\varphi_2(x, y)=C \tag{2.23}$$

是(2.9)的一个初积分，而 $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ 均为实函数，于是 $\varphi=\varphi(x, y)$ 满足方程(2.7)[注].

为了限于在实的范围中考虑问题，我们作如下的自变数变换

$$\begin{cases}\xi=\mathrm{Re}\,\varphi(x, y)=\varphi_1(x, y),\\ \eta=\mathrm{Im}\,\varphi(x, y)=\varphi_2(x, y).\end{cases} \tag{2.24}$$

容易证明，这是一个可逆的变换. 事实上，此时由(2.14)及(2.10)式可得

$$a_{11}\varphi_x=-\left(a_{12}+i\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\right)\varphi_y. \tag{2.25}$$

分离实部与虚部，得

$$\begin{aligned}a_{11}\xi_x&=-a_{12}\xi_y+\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\,\eta_y,\\ a_{11}\eta_x&=-a_{12}\eta_y-\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\,\xi_y.\end{aligned} \tag{2.26}$$

因为假设 $\Delta<0$, 故 $a_{11}\neq0$, 从而变换(2.24)的雅科比行列式为

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}=\frac{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}}{a_{11}}(\xi_y^2+\eta_y^2). \tag{2.27}$$

它不能为零. 否则就有 $\xi_y=\eta_y=0$, 再由(2.26)就得到 $\xi_x=\eta_x=0$, 从而 $\varphi_x=\varphi_y=0$, 这与 $\varphi(x, y)=C$ 是初积分的要求不符. 这就证

[注] 在系数 a_{11}, a_{12} 及 a_{22} 是 (x, y) 的解析函数时，利用常微分方程的解析理论，可以知道这样的初积分总是存在的. 在系数非解析的情形，可以证明能直接从下面的(2.28)式求出 $\xi=\varphi_1(x, y)$ 及 $\eta=\varphi_2(x, y)$，因此以下的讨论仍有效.

明了变换(2.24)是一个可逆的自变数变换.

由于 $\varphi=\xi+i\eta$ 满足方程(2.7), 代入后再将实部与虚部分开, 就得到

$$\begin{cases} a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2, \\ a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y=0, \end{cases} \tag{2.28}$$

即

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}=\bar{a}_{22}, \\ \bar{a}_{12}=0. \end{cases} \tag{2.29}$$

再注意到 $\bar{a}_{11}=\bar{a}_{22}$ 此时不可能为零, 因此方程(2.1)就化为

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=Au_\xi+Bu_\eta+Cu+D \tag{2.30}$$

的形式, 其中 A, B, C, D 是(ξ, η)的已知函数, 具体表达式从略. 特别在 $A, B, C, D\equiv0$ 时, 就得到调和方程.

2.2 方程的分类

从上面的讨论知道, 由(2.11)式引入的、由方程主部的系数所组成的判别式 Δ 的符号在方程的化简中起着重要的作用, 据此我们可以将方程加以分类.

若在区域 Ω 中的一点 (x_0, y_0), 满足

$$\Delta\equiv a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0, \tag{2.31}$$

则称方程(2.1)在此点(x_0, y_0)为双曲型的; 若在点(x_0, y_0)满足

$$\Delta\equiv a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0, \tag{2.32}$$

则称方程(2.1)在此点为抛物型的; 若在点 (x_0, y_0) 满足

$$\Delta\equiv a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0, \tag{2.33}$$

则称方程(2.1)在此点为椭圆型的.

这样, 在区域 Ω 中的任一点, 方程(2.1)必属于而且只属于上述三种类型之一, 且其类型完全由方程主部中的系数决定, 与非主部中的系数无关.

如果考察整个区域 Ω, 就有:

(1) 若在 Ω 中的每一点, 方程(2.1)都是双曲型, 即在 Ω 中处处成立 (2.31), 就称方程在区域 Ω 中为双曲型, 简称为双曲型方

程. 弦振动方程就是一个双曲型方程.

(2) 若在 Ω 中的每一点,方程(2.1)都是抛物型,即在 Ω 中处处成立 (2.32), 就称方程在区域 Ω 中为抛物型,简称为抛物型方程. 一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad (a>0\text{ 常数}) \tag{2.34}$$

就是一个抛物型方程.

(3) 若在 Ω 中的每一点,方程(2.1)都是椭圆型,即在 Ω 中处处成立 (2.33), 就称方程在区域 Ω 中为椭圆型,简称为椭圆型方程. 二维调和方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{2.35}$$

就是一个椭圆型方程.

但除上述三种情况外, 由于在 Ω 中的不同的点, 方程可以有不同的类型, 因此在整个区域 Ω 上考察, 还可能出现以下的一些情况:

(4) 若在 Ω 中的一部分区域上方程 (2.1) 为双曲型 ($\Delta>0$), 在另一部分区域上方程为椭圆型 ($\Delta<0$), 于是, 由连续性, 在这两个区域的分界线上, 方程(2.1)必为抛物型 ($\Delta=0$), 这种类型的方程称为混合型方程. 例如: 脱里谷米 (Tricomi) 方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{2.36}$$

在上半平面 $y>0$ 为椭圆型, 在下半平面 $y<0$ 为双曲型, 而在 $y=0$ 为抛物型. 它在整个 (x, y) 平面上就是一个混合型方程, 而 $y=0$ 通称为变型线. 这种类型的方程在气体动力学的跨音速流理论中有重要的应用, 因此混合型方程也同样很引起人们的重视.

(5) 若在 Ω 中的一部分区域上方程 (2.1) 为双曲型, 在其余部分为抛物型, 而在 Ω 中没有椭圆型的点, 则方程称为退缩双曲型方程. 例如脱里谷米方程在下半平面 $y\leqslant 0$ 为一个退缩双曲型方程; 又如方程

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{2.37}$$

在 $y\neq 0$ 时为双曲型，在 $y=0$ 时为抛物型，在任何包含 $y=0$ 的区域中均为退缩双曲型方程.

(6) 若在 Ω 中的一部分区域上方程 (2.1) 为椭圆型，在其余部分为抛物型，而在 Ω 中没有双曲型的点，则方程称为退缩椭圆型方程. 例如脱里谷米方程在上半平面 $y\geqslant 0$ 就是一个退缩椭圆型方程；方程

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{2.38}$$

在任何包含 $y=0$ 的区域中均为退缩椭圆型方程.

对于在一个区域 Ω 中为双曲型、抛物型或椭圆型的方程，可以用上一段的方法将方程进行化简，分别得到相应的方程(2.16)或(2.18)、(2.20)或(2.22)以及(2.30)，称为这些方程的标准型. 必须注意，这种化标准型的方法一般说来只能在 Ω 中某一点 (x_0, y_0)的邻域中有效，但在一些重要的特殊情况，所作的变换在整个区域 Ω 中都是可逆的，因此可以将方程在整个区域 Ω 中化为标准型. 因此，在具体将方程化为标准型时，我们必须注意其有效的范围是局部的还是遍及整个区域.

这儿必须注意，我们只能在具有确定类型的区域中用上述方法化标准型，因此例如对脱里谷米方程，我们只能分别在其双曲型区域及椭圆型区域中化标准型，而不能在整个混合型区域化标准型，也不能在变型线 $y=0$（它不是一个区域！）上化为抛物型方程的标准型.

下面我们再将方程在一点的分类准则从另一个角度来加以说明，以利于今后的推广. 引入方程(2.1)的主部系数所组成的对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.39}$$

并记其特征值为 ν_1 及 ν_2，则易知有

$$\nu_1\nu_2=\det A=-\Delta. \tag{2.40}$$

于是若方程在一点 (x_0, y_0) 为双曲型，则 ν_1, ν_2 异号；若方程在点 (x_0, y_0) 为抛物型，则 ν_1, ν_2 中有一个为零(也只能有一个为零，因为 a_{11}, a_{12}, a_{22} 不同时为零)；若方程在点 (x_0, y_0) 为椭圆型，则 ν_1, ν_2 同号.

引入二次型

$$Q(\lambda)=a_{11}\lambda_1^2+2a_{12}\lambda_1\lambda_2+a_{22}\lambda_2^2, \tag{2.41}$$

则方程在一点 (x_0, y_0) 的分类准则也可表述为：若二次型 $Q(\lambda)$ 为正定或负定，则方程为椭圆型；若 $Q(\lambda)$ 为退化，则方程为抛物型；若 $Q(\lambda)$ 不是正定或负定，又非退化，则方程为双曲型.

2.3 例

【例 2.1】 考虑方程

$$y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+x^2u_{yy}=0.$$

其判别式 $\Delta=0$，故为抛物型方程；但为使方程主部的系数不全为零，所考虑的区域应不包含坐标原点. 此时，相应的特征方程

$$y^2\,dy^2-2xy\,dx\,dy+x^2\,dx^2=0$$

可写为

$$(y\,dy-x\,dx)^2=0,$$

其初积分为

$$x^2-y^2=C.$$

于是可作自变数变换

$$\begin{cases}\xi=x^2-y^2,\\ \eta=\varphi_2(x, y),\end{cases}$$

这里 $\varphi_2(x, y)$ 只要选取得使变换为可逆即可，然而，从化简方程的角度应该选取尽可能简单的 φ_2 来达到要求. 由于所考察的区域不包含坐标原点，就可特别取 $\varphi_2=xy$，而得可逆变换

$$\begin{cases}\xi=x^2-y^2,\\ \eta=xy.\end{cases}$$

此时有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+y\dfrac{\partial u}{\partial \eta},\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+x\dfrac{\partial u}{\partial \eta},\\[2mm]\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+4xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial \xi},\\[2mm]\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-4xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2(x^2-y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta},\\[2mm]\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-4xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial \xi},\end{cases}$$

于是原方程化为

$$(x^2+y^2)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2(y^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial \xi}+2xy\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,$$

即
$$(\xi^2+4\eta^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-2\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}+2\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,$$

或
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\frac{2\xi}{\xi^2+4\eta^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{2\eta}{\xi^2+4\eta^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

此时若再作未知函数的线性变换

$$v=ue^{\int\frac{\eta}{\xi^2+4\eta^2}d\eta}=u(\xi^2+4\eta^2)^{\frac{1}{8}},$$

还可以消去方程右端对 η 的一阶导数项，但却要多出含 v 的项，方程的形式并不能得到进一步的简化。

【例 2.2】 脱里谷米方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

的特征方程为

$$y\,dy^2+dx^2=0. \tag{2.42}$$

由于它是混合型方程，只能分别在双曲型区域及椭圆型区域中将方程化为标准型。

在双曲型区域 $y<0$ 中，(2.42)可写为

$$dx\pm\sqrt{-y}\,dy=0,$$

故可求得其初积分分别为

$$x \mp \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = C.$$

于是作变换

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}, \\ \eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}, \end{cases} \tag{2.43}$$

通过具体计算可知原方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0. \tag{2.44}$$

这种类型的方程称为欧拉-泊松(Euler-Poisson)方程. 我们可注意到变换(2.43)在整个双曲型区域$y<0$中是可逆的，并将区域$y<0$化为(ξ, η)平面上的区域$\eta-\xi>0$；而原方程的变型线$y=0$此时化为方程(2.44)的奇线$\eta-\xi=0$.

在椭圆型区域$y>0$中，可将(2.43)写成

$$dx \pm i\sqrt{y}\,dy = 0,$$

故其初积分为

$$x \pm i\frac{2}{3}y^{3/2} = C.$$

于是作变换

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = \frac{2}{3}y^{3/2}, \end{cases} \tag{2.45}$$

原方程就化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \tag{2.46}$$

同样可以看到，变换(2.45)在整个椭圆型区域$y>0$中是可逆的，并将区域$y>0$化为(ξ, η)平面上的区域$\eta>0$；而原方程的变型线$y=0$此时同样化为方程(2.46)的奇线$\eta=0$.

2.4 多自变数的二阶线性方程的分类

在自变数个数大于2时，已不能象二自变数情形那样将二阶线性方程在一个区域中化为标准型，但仍可以类似地将方程进行

分类.

考察一般形式的多自变数的二阶线性偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f, \tag{2.47}$$

其中 a_{ij}, b_i (i, $j=1$, $\cdots$, n) ,c 及 f 是 n 维空间(x_1, x_2, $\cdots$, x_n)的某区域 Ω 中的连续函数, a_{ij} (i, $j=1$, $\cdots$, n)不同时为零, 且不失一般性可设 $a_{ij}=a_{ji}$.

类似于二自变数的情形,引入二次型

$$Q(\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j, \tag{2.48}$$

同样可以给出如下的定义: 若在区域 Ω 中的一点 $P(x_1^0, \cdots, x_n^0)$, 二次型 $Q(\lambda)$ 为正定或负定 (即其一切特征值为同号), 则称方程(2.47)在 P 点为椭圆型; 若二次型 $Q(\lambda)$ 在 P 点为退化, 且其特征值中只有一个为零,而其余特征值有同一符号,则称方程(2.47)在 P 点为抛物型; 若二次型 $Q(\lambda)$ 在 P 点既不退化, 又不为正定或负定, 且有 $n-1$ 个特征值具有同一符号(另一特征值必异号), 则称方程(2.47)在 P 点为双曲型. 按照上述定义, 对多自变量的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0, \tag{2.49}$$

其相应的二次型

$$Q(\lambda)=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2$$

是正定的,故为椭圆型;对多维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) \quad (a>0\text{ 常数}), \tag{2.50}$$

其相应的二次型

$$Q(\lambda)=\lambda_0^2-a^2(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2)$$

既非退化, 又非正定或负定, 且在 $n+1$ 个特征值中有 n 个具有同一符号(即 $-a^2$), 故为双曲型; 对多维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) \quad (a>0\text{ 常数}), \tag{2.51}$$

其相应的二次型

$$Q(\lambda)=-a^2(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2)$$

为退化的，且只有一个特征值为零，而其余特征值为同号，故为抛物型.

必须指出，在多个自变数的情形，还可能出现一些在二自变数情形所不可能出现的复杂情况. 例如二次型 $Q(\lambda)$ 在 P 点既不退化，又不正定或负定，而正、负特征值的个数都不止一个，这时，方程(2.47)称为在 P 点为超双曲型. 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} \tag{2.52}$$

就是超双曲型的. 又例如二次型 $Q(\lambda)$ 在 P 点退化，但有好几个特征值为零，而其余的特征值同号，这时，方程(2.47)称为在 P 点为超抛物型. 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=m}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\quad (n\geqslant m>1) \tag{2.53}$$

就是超抛物型的，等等. 但在应用中碰得最多因而也最重要的，还是双曲、椭圆或抛物型的方程.

习　　题

1. 判定下述方程的类型:

(1) $u_{xx}-2xu_{xy}=0$;

(2) $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$;

(3) $u_{xx}-2\sin x u_{xy}-\cos^2 x u_{yy}-\cos x u_y=0$;

(4) $(1+x^2)u_{xx}+(1+y^2)u_{yy}+xu_x+yu_y-2u=0$;

(5) $(1-x^2)u_{xx}-2xyu_{xy}+(1-y^2)u_{yy}=0$.

2. 证明二自变数的二阶线性方程经过自变数的可逆变换及未知函数的可逆线性变换后，其类型不会改变.

3. 将下列方程化为标准型:

(1) $u_{xx}-4u_{xy}+5u_{yy}-3u_x+u_y+u=0$;

(2) $u_{xy}+2u_{yy}-u_x+4u_y+u=0$;

(3) $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+3u_x-5u_y+4u=0$;

(4) $e^{2x}u_{xx}+2e^{x+y}u_{xy}+e^{2y}u_{yy}-xu=0$;

(5) $u_{xx}-(1+y^2)^2u_{yy}-2y(1+y^2)u_y=0$;

(6) $u_{yy}-2xu_{xy}=0$.

4. 证明二自变数的二阶常系数椭圆型及双曲型方程一定可以通过自变数的可逆变换及下述形式的未知函数变换

$$u=e^{\lambda\xi+\mu\eta}v\quad(\lambda,\ \mu\ 常数)$$

分别化为

$$v_{\xi\xi}\pm v_{\eta\eta}+cv=f$$

的形式。

第二章

热传导方程

本章介绍典型的抛物型方程——热传导方程.在研究热传导、扩散等物理现象时都会遇到这类方程. 在§1中介绍方程的归结及定解问题的提法.在§2中用分离变量法求解热传导方程的混合问题,并介绍求解非齐次方程时常用的方法—齐次化原理. §3讨论热传导方程的柯西问题. 最后在§4中证明热传导方程解的一个基本性质——极值原理, 并由此得到混合问题及柯西问题的解的唯一性及稳定性. 本章中有关的论证一般只对一个空间变量的情形进行;对于多个空间变量的情形,可以类似地进行讨论.

§1 热传导方程及其定解问题

1.1 热传导方程的导出

在不少实际问题中, 经常要考察空间某物体 Ω 上各点的温度分布状态,热传导方程就是从相应的物理模型中归结出来的.

在着手推导热传导方程之前, 先对热传导现象作一些简单的说明. 我们知道,当物体中各部分温度分布不均匀时,就会产生热的传导现象,即热量将由温度高的部分流向温度低的部分. 图2.1表示一块面积为 ΔS、厚度为 Δn 的板状物体. 如果板左表面的温度保持为 u_2, 右表面的温度保持为 u_1, 且例如说 $u_1<u_2$, 则热量将由左边通过板状物体面流向右边, 用 ΔQ 表示在 Δt 时间内流过此板状物体的热量. 由实验知道: ΔQ 和时间 Δt、板的面积 ΔS 及温度差 u_2-u_1 成正比,而和板的厚度 Δn 成反比,即有

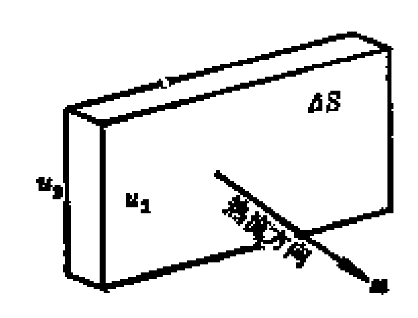


图 2.1

$$\Delta Q \propto \frac{u_2-u_1}{\Delta n}\Delta S\,\Delta t,$$

或写为

$$\Delta Q=-k\frac{u_1-u_2}{\Delta n}\Delta S\,\Delta t, \tag{1.1}$$

其中常数 $k>0$ 称为热传导系数，它与材料的性质有关．(1.1)式中的负号表示热量总是从温度高处流向温度低处．

如果物体中各点的温度不均匀，且随时间 t 而改变，记温度分布函数为 $u(x, y, z, t)$．考虑过点 (x, y, z) 的一个无穷小面积 dS 的薄片，并考察在无穷小时段 dt 内沿此薄片 dS 的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 流过此薄片的热量 dQ．由(1.1)式有

$$dQ=-k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial n}dS\,dt. \tag{1.2}$$

它称为传热学中的傅立叶(Fourier)实验定律．其中 $k(x, y, z)$ 称为物体在点 (x, y, z) 处的热传导系数，它恒取正值．

利用傅立叶实验定律，我们就可以用下述方法来导出热传导方程．

在物体 Ω 中任取一个区域 G，其边界面记为 S，则由(1.2)式从时刻 t_1 到 t_2 流进此区域 G 中的全部热量为

$$Q=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_S k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial n}dS\right\}dt, \tag{1.3}$$

于此 $\boldsymbol{n}$ 表示曲面 S 的外法线方向．

另一方面，在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 中，由于温度从 $u(x, y, z, t_1)$ 变化到 $u(x, y, z, t_2)$，整个区域 G 所吸收的热量应为

$$\iiint_G c(x, y, z)\rho(x, y, z)[u(x, y, z, t_2)-u(x, y, z, t_1)]dx\,dy\,dz, \tag{1.4}$$

其中 c 及 ρ 分别为物体的比热及密度．

如果物体内部没有热源，由(1.3)式所表示的流入 G 中的热量就是使 G 内部温度发生变化所需要的热量(1.4)，于是成立

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_S k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial n}dS\right\}dt$$

$$=\iiint_G c(x, y, z)\rho(x, y, z)[u(x, y, z, t_2)$$

$$-u(x, y, z, t_1)]dx\,dy\,dz.$$

假设函数 u 关于变量 x, y, z 具有二阶连续偏导数，关于 t 具有一阶连续偏导数，利用格林公式

$$\iint_S\left[P\cos(\boldsymbol{n}, x)+Q\cos(\boldsymbol{n}, y)+R\cos(\boldsymbol{n}, z)\right]dS$$

$$=\iiint_G\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法线方向，可将上式化为

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_G\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\}dx\,dy\,dz\,dt$$

$$=\iiint_G c\rho\left(\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}dt\right)dx\,dy\,dz,$$

即

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_G\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz\,dt=0.$$

由于 t_1, t_2 与区域 G 的任意性，由此我们得到

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{1.5}$$

这就是对非均匀的各向同性体的热传导方程.

对于均匀的物体，k, c 及 ρ 均为常数，此时记 $a^2=\frac{k}{c\rho}>0$，即得均匀各向同性体的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{1.6}$$

如果所考察的物体内部有热源（例如物体中通有电流，或有化

学反应等情况)，则在推导热传导方程时还需考察热源的影响. 若设在单位时间中热源的体积密度为 $F(x, y, z, t)$，则在考虑热平衡时，(1.4)式应等于(1.3)式再加上

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{\Omega} F(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

于是，在均匀各向同性的情形，热传导方程应为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x, y, z, t), \qquad (1.7)$$

其中

$$f(x, y, z, t)=\frac{F(x, y, z, t)}{c\rho}. \qquad (1.8)$$

今后，我们称(1.6)为齐次热传导方程，而称(1.7)为非齐次热传导方程，它们都是线性方程.

1.2 定解问题的提法

从第一章的讨论知道，为了确定方程(1.6)或(1.7)的解，我们必须给出适当的定解条件. 对于热传导现象，从物理上知道，为了确定物体 Ω 的温度分布状况，即决定函数 $u(x, y, z, t)$，必须知道物体的初始温度（初始条件）及物体所处的周围环境的状况（边界条件）. 显然，在初始温度相同而外界条件不同时，或外界条件相同而初始温度不同时，描写物体温度分布的函数 u 也要不同. 而如果已知物体在初始时刻的温度和物体边界上的温度状况（或热交换状况）就应该可以完全确定物体在以后时刻的温度. 因此，对热传导方程通常应在已给的初始条件与边界条件下求问题的解.

初始条件的提法显然为：

$$t=0:\ u=\varphi(x, y, z) \quad (x, y, z)\in\Omega, \qquad (1.9)$$

其中 $\varphi(x, y, z)$ 为已知函数，表示物体在 $t=0$ 时的温度分布.

现在考察边界条件的提法. 对热传导方程来说，常见的边界条件是如下三种形式之一：

第一种情形：已知物体表面的温度. 这种边界条件的数学形式为

$$u(x, y, z, t)\big|_{(x,y,z)\in\Gamma}=\nu(x, y, z, t), \tag{1.10}$$

其中 Γ 表示物体 Ω 的边界曲面，$\nu(x, y, z, t)$ 是定义在 $(x,y,z)\in\Gamma$, $0\leqslant t\leqslant T$ 上的已知函数．这种边界条件通称为热传导方程的**第一类边界条件或狄利克雷(Dirichlet)边界条件**．

第二种情形：在物体的表面 Γ 上已知的不是温度而是热流量，即已知在单位时间内沿法线方向流过表面上单位面积的热量．由傅立叶实验定律，这实际上表示温度 u 在物体表面上的法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 是已知的，于是其数学形式为

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{(x,y,z)\in\Gamma}=\nu(x, y, z, t), \tag{1.11}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 表示边界 Γ 的外法线方向，而 $\nu(x, y, z, t)$ 是物体边界曲面上的已知函数．这类边界条件称为热传导方程的**第二类边界条件或诺伊曼(Neumann)边界条件**．

特别在 $\nu=0$ 的情形，(1.11)化为

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{(x,y,z)\in\Gamma}=0. \tag{1.11'}$$

这表示物体和外界没有热量的交换，即边界是绝热的情形．

第三种情形：已知物体和周围介质在物体表面的热交换状况．设已知周围介质(如空气，冷却油等)在物体表面上的温度为 $u_1(x, y, z, t)$，在表面 Γ 上，物体和外部介质有温度差

$$u(x, y, z, t)\big|_\Gamma-u_1(x, y, z, t)\big|_\Gamma,$$

因而就有热量的流动．这儿，由于热量交换在两种不同的物质之间进行，它应满足如下的**牛顿实验定律**：

在无穷小时段 dt 内，经过物体表面上的无穷小面积 dS 流到周围介质中去的热量 dQ 和在接触面上的温度差成正比，即成立

$$dQ=k_1(u|_\Gamma-u_1|_\Gamma)dS\,dt,$$

其中 k_1 可由实验测定，称为**换热系数**，它也取正值．

但是由前述的傅立叶实验定律(1.2)，这个自物体表面流向外界的热量又应等于

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} dSdt$$

(其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为外法向导数)，于是得到在 Γ 上成立

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}=k_1(u-u_1).$$

若记
$$\sigma=\frac{k_1}{k},\quad \nu=\frac{k_1u_1}{k},$$

上式就可改写为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\bigg|_{(x,y,z)\in\Gamma}=\nu(x,\ y,\ z,\ t), \tag{1.12}$$

其中 σ, ν 均为边界 Γ 上的已知函数，而 $\sigma>0$. 这类边界条件称为热传导方程的**第三类边界条件**.

在边界条件(1.10)、(1.11)或(1.12)中，若 $\nu(x, y, z, t)$不恒为 0,则称为**非齐次边界条件**；反之,若 $\nu\equiv0$,则称为**齐次边界条件**.

这样，由热传导方程，初始条件(1.9)及上述三种边界条件中的任一种就构成了所要考察的定解问题. 这种既有初始条件又有边界条件的定解问题,称为**混合问题**.

如果所考察的物体体积很大，而所需知道的又只是在较短时间中和内部较小范围内的温度变化情况，此时边界条件所产生的影响近似地可以忽略，相应地，作为一种近似，就不妨假设所考察的物体充满整个空间，而化为考察如下的定解问题，通称为**初值问题**(或**柯西**(Cauchy)**问题**)：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,\ y,\ z,\ t),\ (x,\ y,\ z)\in R^3,\\ t=0:\ u=\varphi(x,\ y,\ z).\end{cases} \tag{1.13}$$

在一些特定的情况下，方程中描述位置坐标的独立变量的数目可以适当减少，这将给问题的求解带来方便.

例如在考虑均匀细柱形杆的热传导问题时，如果其侧面是绝热的，并且同一横截面上的各点具有相同的温度，那么温度函数 u 仅与一个空间坐标 x 及时间 t 有关，我们就得到一维的热传导

方程
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x, t). \tag{1.14}$$
对于一维热传导方程，同样可以提出混合问题和初值问题等定解问题.

类似地，在研究上下底面为绝热的薄板的温度分布时（此时可认为温度沿厚度 z 的方向不变），我们可得二维热传导方程
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x, y, t). \tag{1.15}$$
对于它，同样可以提相应的定解问题.

1.3 扩散方程

在研究分子扩散现象（如气体的扩散，液体的渗透，半导体材料中杂质的扩散等）时，会碰到与热传导方程类似的方程，称为扩散方程.

由于扩散方程与热传导方程的导出过程极为相似，我们只需将扩散过程所满足的物理规律与热传导过程所满足的物理规律作一类比，就可以得到扩散方程.

在推导齐次热传导方程时起基本作用的是下面的傅立叶实验定律与热量守恒定律：
$$dQ=-k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial n}dS\,dt,$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS\,dt=\iiint_G c\rho[u(x, y, z, t_2)-u(x, y, z, t_1)]\,dx\,dy\,dz,$$
其中有关量的意义已在前面说明. 在考虑扩散过程时，我们相应地有扩散定律及质量守恒定律，它们的形式分别是
$$dm=-D(x, y, z)\frac{\partial N}{\partial n}dS\,dt, \tag{1.16}$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_S D\frac{\partial N}{\partial n}dSdt=\iiint_G[N(x, y, z, t_2)-N(x, y, z, t_1)]dxdydz, \tag{1.17}$$

其中 N 表示扩散物质的浓度（单位体积中的分子数或质量），dm 表示在无穷小时段 dt 内沿法线 $\boldsymbol{n}$ 方向经一个无穷小面积 dS 所扩散的物质的量，而 $D(x, y, z)$ 称为**扩散系数**，它恒取正值.

由此仿照热传导方程的导出过程，不难得到齐次的扩散方程应为

$$\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial N}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial N}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial N}{\partial z}\right),$$

也可类似于(1.7)写出非齐次的扩散方程.

对于扩散过程，也可以提出相应的柯西问题与混合问题.

习　题

1．一均匀细杆直径为 l，假设它在同一截面上的温度是相同的，杆的侧表面和周围介质（温度为 u_1）发生热交换：

$$dQ=k_1(u-u_1)\,dS\,dt,$$

又假设杆的密度为 ρ，比热为 c，热传导系数为 k，试导出此时温度 u 所满足的方程.

2．一均匀细杆侧面绝热，二端点 $x=0$ 及 $x=l$ 均自由冷却，即杆端和周围介质（二端介质温度分别为 Q_1 及 Q_2）按牛顿实验定律交换热量，试写出其边界条件.

3．试直接推导扩散过程所满足的微分方程.

4．砼（混凝土）内部储藏着热量，称为水化热，它在浇筑后逐渐放出，放热速度和它所储藏的水化热成正比．以 $Q(t)$ 表示它在单位体积中所储的热量，则 $\frac{dQ}{dt}=-\beta Q$，其中 β 为常数；又 $Q(0)=Q_0$ 设为已知．假设砼的比热为 c，密度为 ρ，热传导系数为 k，求它在浇筑后的温度 u 满足的方程.

5．设一均匀的导线处在周围为常数温度 u_0 的介质中，试证：若在导线中通以电流（其电流强度 i 为常数），则导线的温度满足微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{c\rho}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{k_1 P}{c\rho\omega}(u-u_0)+\frac{0.24 i^2 r}{c\rho\omega^2},$$

其中 r 表示导体的电阻系数，P 及 ω 分别表示导线横截面的周长及面积，而 k_1 表示导线对于周围介质的热交换系数.

§2　混合问题·分离变量法

2.1 迭加原理

如果在所考虑的定解问题中，微分方程及定解条件都是线性的，就称此定解问题为一个*线性的定解问题*. 对于一个复杂的线性定解问题总可以把它分解为若干个比较简单的问题来求解，然后将这些简单问题的解迭加起来，就得到原问题的解. 换言之，此时总可以将对解起影响的各个不同的因素分别加以考虑而求出相应的解，然后把这些解迭加起来就得到这些因素联合作用时问题的解. 这个事实，称为*迭加原理*，它对线性的定解问题总是适用的.

例如，考察热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,\ t), \\ t=0:\ \ u=\varphi(x). \end{cases} \tag{2.1}$$

在热传导的情形，$f(x,\ t)$相应于内部的热源项，而$\varphi(x)$对应于初始温度，因此，上述问题(2.1)要求解的是在初始温度及热源项同时存在时的温度分布状态. 为了求解这个温度分布状态，可以先分别单独考虑初始温度及热源的作用，即先分别求解下述二个柯西问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=0, \\ t=0:\ \ u_1=\varphi(x) \end{cases} \tag{2.2}$$

及

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=f(x,\ t), \\ t=0:\ \ u_2=0. \end{cases} \tag{2.3}$$

容易看到，在分别求得此两定解问题的解u_1及u_2后，将它们迭加起来，就得到原问题(2.1)的解$u=u_1+u_2$. 这就是迭加原理的一个具体的应用. 在既有初始条件又有边界条件的情形（即对混合问题），情况也是类似的.

这样，对于线性的定解问题，总可以利用迭加原理将一个复杂的问题化为一些简单的问题来分别求解. 但必须着重指出，迭加原理只对线性的定解问题才能成立，而不适用于非线性的情形，这

也是求解非线性问题的一个困难所在.

现在我们考虑热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,\ t), & (2.4)\\ t=0:\ \ u=\varphi(x), & (2.5)\\ x=0:\ \ u=\mu_1(t), & \\ x=l:\ \ u=\mu_2(t). & (2.6)\end{cases}$$

首先指出,在求解中总可以假设成立

$$\mu_1(t)\equiv\mu_2(t)\equiv 0, \tag{2.7}$$

即总可化为具齐次边界条件的问题来求解. 事实上,取一个满足边界条件(2.6)的函数 $V(x,\ t)$,例如说,取

$$V(x,\ t)=\frac{1}{l}[(l-x)\mu_1(t)+x\mu_2(t)], \tag{2.8}$$

并作未知函数的变换

$$U=u-V, \tag{2.9}$$

则易知 U 就满足下述具齐次边界条件的混合问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}=f(x,\ t)-\left(\dfrac{\partial V}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\triangleq F(x,\ t),\\ t=0:\ \ U=\varphi(x)-V(x,\ 0)\triangleq\Phi(x),\\ x=0\text{ 及 }x=l:\ U=0.\end{cases}$$

这样,不妨碍一般性,下面我们可以只考虑如下具齐次边界条件的问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,\ t),\\ t=0:\ \ u=\varphi(x),\\ x=0\text{ 及 }x=l:\ \ u=0.\end{cases} \tag{2.10}$$

根据迭加原理,上述混合问题可以分解为下面两个混合问题来分别求解:

$$\text{(I)}\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=0,\\ t=0:\ \ u_1=\varphi(x),\\ x=0\text{ 及 }x=l:u_1=0\end{cases}$$

及

$$(\text{II})\begin{cases}\dfrac{\partial u_2}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=f(x,\ t),\\ t=0:\ \ u_2=0,\\ x=0\text{ 及 }x=l:\ \ u_2=0,\end{cases}$$

并且显然有

$$u=u_1+u_2.$$

这样，为了求解混合问题(2.10)，只要分别求解齐次方程带齐次边界条件及非齐次初始条件的混合问题 (I) 以及非齐次方程带齐次边界条件及齐次初始条件的混合问题(II)即可．从下面讨论将可以看到，问题(II)可以归结为问题 (I) 来求解，在这两个问题中，关键是求解问题(I)．因此，我们首先考察问题(I)的求解，再转而解决问题(II)．

2.2 分离变量法

现在我们结合求解热传导方程的混合问题来介绍求解线性偏微分方程的一个常用方法——分离变量法．

用分离变量法求解混合问题

$$(\text{I})\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & (2.11)\\ t=0:\ \ u=\varphi(x), & (2.12)\\ x=0\text{ 及 }x=l:\ u=0, & (2.13)\end{cases}$$

仍然是基于迭加原理．我们记得，在求解常系数线性齐次常微分方程的初值问题时，是先求得微分方程的足够数目的特解(基本解组)，再由迭加原理作这些特解的线性组合，使满足给定的初始条件．这启发我们，可以从寻求齐次方程(2.11)的满足齐次边界条件(2.13)的足够多的具有简单形式的特解出发，利用它们适当的线性组合使满足给定的初始条件(2.12)，来求得问题(I)的解．

现在试求方程 (2.11) 的可以分离变量的非平凡 (即不恒等于零)的特解：

$$u(x,\ t)=X(x)T(t),\tag{2.14}$$

并要求它满足齐次边界条件(2.13)．这里 $X(x)$ 及 $T(t)$ 分别表示仅与 x 有关及仅与 t 有关的待定函数．

将(2.14)代入方程(2.11)，得到

$$X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t).$$

在上式中分离变量后就有

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{2.15}$$

由于(2.15)式的左边仅是 t 的函数，右边仅是 x 的函数，要使左右两边相等，只有当它们等于同一个常数时才可能．记此常数为 $-\lambda$（其值待定），就得到

$$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0 \tag{2.16}$$

及

$$X''(x)+\lambda X(x)=0. \tag{2.17}$$

这样，方程(2.15)就被分离为两个常微分方程，其中一个仅含有自变量 t，另一个仅含有自变量 x．我们可以通过求解这两个方程来决定 $T(t)$ 及 $X(x)$，从而得到方程(2.11)的特解(2.14)．

为了使此解是满足齐次边界条件(2.13)的非平凡解，就必须选择适当的 λ 值，使方程(2.17)具有满足边界条件

$$X(0)=0,\ X(l)=0 \tag{2.18}$$

的非平凡解．这是常微分方程的特征值(或称固有值)问题．由于(2.17)的通解的形式随 $\lambda>0$，$\lambda=0$ 及 $\lambda<0$ 而不同，下面对此三种情况分别进行考察．

情形 A：当 $\lambda<0$ 时，方程(2.17)的通解可以写成

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数．要使它满足边界条件(2.18)，就必须

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ C_1e^{\sqrt{-\lambda}l}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0.\end{cases}$$

由于行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l}\end{vmatrix}\neq 0,$$

故 $C_1=C_2=0$，即在 $\lambda<0$ 时得不到非平凡解．

情形 B：当 $\lambda=0$ 时，方程(2.17)的通解可以写成

$$X(x)=C_1+C_2x,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 要使它满足边界条件(2.18), 同样只有恒等于零的解.

情形 C: 当 $\lambda>0$ 时, 方程(2.17)的通解具有如下形式:

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 要它满足边界条件 $X(0)=0$, 必须 $C_1=0$. 再由

$$X(l)=C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0,$$

知道为使 $C_2\neq0$, 必须 $\sin\sqrt{\lambda}l=0$, 于是

$$\lambda=\lambda_k=\frac{k^2\pi^2}{l^2}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots).\tag{2.19}$$

这样就找到了一族非平凡解

$$X_k(x)=C_k\sin\frac{k\pi x}{l}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots).\tag{2.20}$$

$\lambda_k=\dfrac{k^2\pi^2}{l^2}$ 就称为所考察的常微分方程特征值问题的特征值(或固有值), 而(2.20)给出的 $X_k(x)$ 为相应的特征函数(或固有函数).

将特征值 λ_k 代入方程(2.16)中, 可得其通解为

$$T_k(t)=A_ke^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots),\tag{2.21}$$

其中 A_k 为任意常数.

这样, 我们得到了方程(2.11)的满足齐次边界条件(2.13)的下列分离变量的特解:

$$\begin{aligned}U_k(x,\ t)&=X_k(x)T_k(t)\\&=A_ke^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{k\pi x}{l}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots).\end{aligned}$$

现在我们设法作出这些特解的适当的线性组合, 使其为混合问题(I)的解, 也就是说, 要决定常数 A_k 使

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_ke^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{k\pi x}{l}\tag{2.22}$$

满足初始条件(2.12), 即成立

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l} = \varphi(x).$$

于是，A_k 应为 $\varphi(x)$ 在区间 $[0, l]$ 上关于正弦函数展开的傅立叶级数的系数，即

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\, d\xi \quad (k=1, 2, \cdots). \qquad (2.23)$$

将由(2.23)式表示的 A_k 代入(2.22)中，就得到用级数形式表示的混合问题(I)的解. 这个方法就称为**分离变量法**.

这样，我们就得到了定解问题(I)的解的级数表达式. 在推导这个解的表达式的过程中，我们自然假设所进行的一切运算都是合理的，而这点事先并未得到保证，因此，这儿所推导的解的表达式还只是形式上有效的. 这种形式上推导解的表达式的过程称为*分析过程*，所得的解称为*形式解*. 要证明形式解的确是所考察的问题的解，即的确满足方程及定解条件，还必须进行验证.

现在证明当初始函数 $\varphi(x)$ 满足一定的条件时，级数(2.22)所给出的形式解确实是定解问题 (I) 的解. 这种验证过程称为**综合过程**.

注意到形式解(2.22)中的每一项都满足方程(2.11)，因此只要证明在 φ 满足一定的条件时，级数(2.22)在 $t>0$, $0\leqslant x\leqslant l$ 时可以关于 t 逐项微分一次，关于 x 逐项微分两次，它就一定满足方程(2.11). 这只要证明级数(2.22)在 $t>0$, $0\leqslant x\leqslant l$ 时关于 t 逐项微分一次及关于 x 逐项微分二次后所得的级数仍是一致收敛的. 此外，如果在 φ 满足一定条件时，级数(2.22)在 $t\geqslant 0$, $0\leqslant x\leqslant l$ 上一致收敛，因而它所表示的函数连续，那末形式解(2.22)也一定满足初始条件(2.12)及边界条件(2.13).

注意对任何 $t\geqslant\delta>0$ 以及任意的正整数 m，恒成立

$$e^{-\frac{k^2\pi^2a^2t}{l^2}} k^m \leqslant M, \qquad (2.24)$$

其中 M 仅与 m 及 δ 有关，而与 k 无关. 因此，容易看到，只要级数 $\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|$ 收敛，则级数(2.22)就在 $t\geqslant 0$, $0\leqslant x\leqslant l$ 上一致收敛，且

在 $t>0$, $0\leqslant x\leqslant l$ 时可关于 t 及关于 x 逐项微分任意次，从而形式解(2.22)确为问题(I)的真正的解，且在区域 $\{t>0,\ 0\leqslant x\leqslant l\}$ 上是 x 及 t 的无穷可微函数.

只要假设 $\varphi(x)\in C^1[0,\ l]$，即设 $\varphi(x)$ 是区间 $[0,\ l]$ 上的连续可微函数(实际上只要假设 $\varphi(x)$ 连续、分段光滑)，且成立

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0, \tag{2.25}$$

那末，就容易证明(参见附录一) $\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|$ 收敛. 因此，在初值 $\varphi(x)$ 满足上述条件时，分离变量法所得的形式解(2.22)就一定是问题(I)的真正的解，且在 $t>0$ 时为无穷可微函数.

这里指出，即使初值 $\varphi(x)$ 不满足上述的要求，在实际计算中仍可利用所得的形式解(2.22)的前面若干项的部分和来给出问题的近似的解答.

2.3 齐次化原理

现在讨论非齐次方程的混合问题

$$(\text{II})\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,\ t), & (2.26)\\ t=0:\ u=0, & (2.27)\\ x=0\ 及\ x=l:\ u=0. & (2.28)\end{cases}$$

为了求解此问题，我们介绍下述的*齐次化原理*(又称*杜阿美(Duhamel)原理*). 它是将非齐次常微分方程化为齐次常微分方程来求解的常数变易法在偏微分方程情形的推广，可把非齐次方程的求解化成相应的齐次方程的情形来处理，从而可以直接利用前面有关齐次方程的结果.

齐次化原理 设 $W(x,\ t;\tau)$ 为如下齐次方程的定解问题(其中 τ 为参数)的解:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\quad (t>\tau), & (2.29)\\ t=\tau:\ W=f(x,\ \tau), & (2.30)\\ x=0\quad 及\quad x=l:\ W=0, & (2.31)\end{cases}$$

则

$$u(x, t)=\int_0^t W(x, t; \tau)d\tau \tag{2.32}$$

就是原混合问题(II)的解.

证明 由(2.32),并注意到(2.30)式,有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int_0^t \frac{\partial W}{\partial t}(x, t; \tau)d\tau+W(x, t; t)$$

$$=\int_0^t \frac{\partial W}{\partial t}(x, t; \tau)d\tau+f(x, t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int_0^t \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x, t; \tau)d\tau,$$

由此由(2.29)式就立即得知 u 满足方程(2.26). 再注意到(2.31)式,易知 u 也满足初始条件(2.27)及边界条件(2.28),证毕.

令 $t'=t-\tau$,混合问题(2.29)—(2.31)可化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t'}-a^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0 \quad (t'>0),\\ t'=0:\ W=f(x, \tau),\\ x=0 \ 及 \ x=l:\ W=0\end{cases}$$

的形式,于是利用齐次方程情形的求解公式(2.22),就得到其解为

$$W(x, t; \tau)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k(\tau)e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t'}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} A_k(\tau)e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}(t-\tau)}\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{2.33}$$

而

$$A_k(\tau)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi, \tau)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{2.34}$$

因此由齐次化原理,就求得混合问题(II)的形式解为

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t A_k(\tau)e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}(t-\tau)}d\tau\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{2.35}$$

为了证明形式解(2.35)确为定解问题(II)的解, 还需要进行验证. 假设 $f\in C^1$, 且 $f(0, t)=f(l, t)=0$, 则可得(参见附录一)级数(2.35)当 $x\in[0, l]$, $t\in[0, T]$ 时本身一致收敛, 且在 $0<t\leqslant T$ 时关于 x 及关于 t 可以逐项求导任意次, 所以 $u(x, t)$ 满足相应的

方程及初、边值条件，即为定解问题(II)的解.

最后我们指出，齐次化原理不仅可以应用于非齐次热传导方程的混合问题，而且也能应用于它的柯西问题以及其它线性方程(例如波动方程)的定解问题，对于非齐次方程定解问题的求解，是一个行之有效的方法.

2.4 例

【例2.1】 求下述定解问题的形式解:

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0 \quad (t>0,\ 0<x<l), & (2.36)\\ t=0:\ u=\varphi(x) \qquad 0\leqslant x\leqslant l, & (2.37)\\ x=0:\ \ u=0, & (2.38)\\ x=l:\ u_x+hu=0 \quad h>0\ \text{为常数}. & (2.39)\end{cases}$$

解 用分离变量法求解. 令

$$u(x,\ t)=X(x)T(t),$$

代入(2.36)并分离变量得

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{2.40}$$

$$X(0)=0,\ X'(l)+hX(l)=0 \quad (h>0) \tag{2.41}$$

及

$$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0. \tag{2.42}$$

求解特征值问题(2.40)、(2.41)，与前面的讨论类似地可得

(i) 当 $\lambda\leqslant 0$ 时，只有平凡解 $X\equiv 0$;

(ii) 当 $\lambda>0$ 时，

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}\,x+B\sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

利用边界条件 $X(0)=0$，得 $A=0$. 于是为使 $X(x)$ 为非平凡解，λ 应满足方程

$$\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,l+h\sin\sqrt{\lambda}\,l=0,$$

即特征值 λ 应是下述三角方程的正解:

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\,l=-\frac{\sqrt{\lambda}}{h}. \tag{2.43}$$

令

$$v=\sqrt{\lambda}\,l, \tag{2.44}$$

上式变为

$$\operatorname{tg} v=-\frac{v}{lh}. \tag{2.45}$$

利用图解法(见图 2.2)或数值求解法可得出这个方程的根. 由图 2.2 知(2.45)有无穷多个正根 $v_k>0(k=1, 2, \cdots)$, 且当 $k\to\infty$ 时, $v_k\to+\infty$. 因此, 特征值问题(2.40)、(2.41)存在着无穷多个特征值

$$\lambda_k=\left(\frac{v_k}{l}\right)^2 \quad (k=1, 2, \cdots)$$

及相应的特征函数

$$X_k=B_k\sin\sqrt{\lambda_k}\,x=B_k\sin\frac{v_k}{l}x \quad (k=1, 2, \cdots).$$

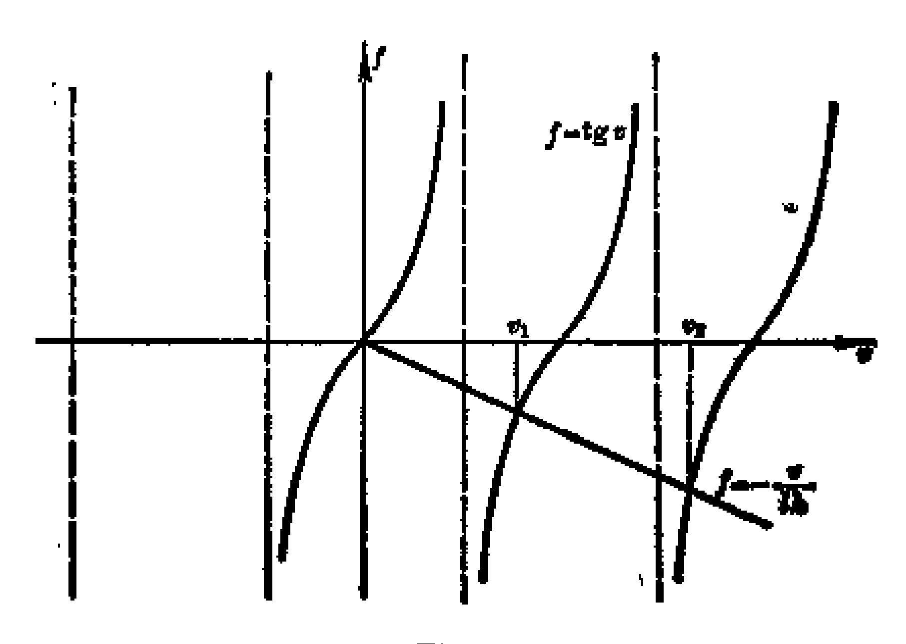


图 2.2

把 $\lambda=\lambda_k$ 代入(2.42)式, 可解得

$$T_k(t)=c_k e^{-a^2\lambda_k t} \quad (k=1, 2, \cdots),$$

于是得到一列可分离变量的特解

$$u_k(x, t)=A_k e^{-a^2\lambda_k t}\sin\sqrt{\lambda_k}\,x \quad (k=1, 2, \cdots).$$

由于方程(2.36)及边界条件(2.38)、(2.39)均为齐次的, 故由迭加原理得

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-a^2\lambda_k t}\sin\sqrt{\lambda_k}\,x, \tag{2.46}$$

它(至少在形式上)满足方程(2.36)及边界条件(2.38)、(2.39).

为使在 $t=0$ 时 $u(x, t)$ 取到初值 $\varphi(x)$, 应成立

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, x=\varphi(x). \tag{2.47}$$

为确定系数 A_k, 须先证明特征函数系 $\{X_k\}=\{\sin\sqrt{\lambda_k}\, x\}$ 在 $[0, l]$ 上正交. 设特征函数 X_n 和 X_m 分别对应于不同的特征值 λ_n 和 λ_m, 有

$$X_n''+\lambda_n X_n=0, \quad X_m''+\lambda_m X_m=0.$$

以 X_m 和 X_n 分别乘第一和第二式. 相减后在 $[0, l]$ 上积分, 利用 X_n 和 X_m 都满足边界条件(2.41), 就得到

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_n X_m dx=(X_n X_m'-X_m X_n')\Big|_0^l=0.$$

由于 $\lambda_n\neq\lambda_m$, 故得特征函数系的正交性

$$\int_0^l X_n X_m dx=\int_0^l \sin\sqrt{\lambda_n}\, x\cdot\sin\sqrt{\lambda_m}\, x dx=0, \quad m\neq n. \tag{2.48}$$

记

$$M_k=\int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}\, x\, dx,$$

由正交性(2.48), 从(2.47)式可求得

$$A_k=\frac{1}{M_k}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\sqrt{\lambda_k}\,\xi d\xi.$$

代入(2.46)式, 就得到混合问题(2.36)—(2.39)的形式解为

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{M_k}\int_0^l e^{-a^2\lambda_k t}\varphi(\xi)\sin\sqrt{\lambda_k}\,\xi\sin\sqrt{\lambda_k}\, x d\xi. \tag{2.49}$$

通过上面讨论, 我们可以总结出分离变量法的要点如下:

(1) 它的基础是迭加原理, 因此只能适用于线性的定解问题.

(2) 若边界条件不是齐次的, 先选择满足边界条件的函数 V, 作未知函数变换 $U=u-V$, 使 U 满足齐次边界条件, 并列出 U 所满足的方程和初始条件. 通常可选 V 为 x 的一次或二次多项式, 其系数一般是 t 的函数. 在选择 V 时如有可能最好使 U 也同时满足齐次方程, 以使求解过程得到简化.

(3) 在非齐次方程的情形, 用齐次化原理化为齐次方程来求解.

(4) 以形如 $X(x)T(t)$ 的函数代入相应的齐次方程，结合齐次边界条件列出关于 X 的特征值问题和关于 T 的方程；先求解关于 X 的特征值问题，求得其一切特征值及相应的特征函数；再相应地求解 T 的方程，作级数 $\sum_k T_k(t)X_k(x)$.

(5) 由初始条件确定上述级数中的待定系数，得形式解.

(6) 必要时进行级数的收敛性讨论，完成综合过程.

这儿，一个中心的环节是求解相应的特征值问题. 为此要考察

1) 特征值的存在性；

2) 特征函数系的正交性；

3) 特征函数系的完备性，即考察一定的函数类中的函数是否可按特征函数系展开.

对于上面讨论的一些特殊的特征值问题，利用数学分析课程中的知识可知，这些问题的回答是肯定的. 对于一般情形，尤其是对变系数方程的情形(例如对非均匀杆的热传导问题)，采用分离变量法会引出变系数线性常微分(或偏微分)方程的特征值问题或称斯图姆–刘维尔(Sturm–Liouville)问题，这是数学物理方程中的一个专门研究的课题，在第五章中还将简述有关的结论.

习题

1. 用分离变量法求下列定解问题的形式解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (t>0,\ 0<x<\pi), \\ u(0,t)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)=0 \quad (t>0), \\ u(x,0)=f(x) \quad (0<x<\pi). \end{cases}$$

2. 用分离变量法求解热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (t>0,\ 0<x<1), \\ u(x,0)=\begin{cases} x^2, & \left(0<x\leqslant\dfrac{1}{2}\right), \\ (x-1)^2, & \left(\dfrac{1}{2}<x<1\right), \end{cases} \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \quad (t>0). \end{cases}$$

3. 长度为 l 的均匀细杆，其周围及其两端 $x=0$, $x=l$ 均为绝热，初始温度分布为 $u(x,0)=f(x)$，求以后时刻的温度分布．且证明当 $f(x)$ 等于常数 u_0 时，恒有 $u(x,t)=u_0$．

4. 在区域 $t>0$, $0<x<l$ 中求解如下的定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta(u-u_0), \\ u(0,t)=u(l,t)=u_0, \\ u(x,0)=f(x), \end{cases}$$

其中 a, β, u_0 均为常数，$f(x)$ 为已知函数．

5. 长度为 l 的均匀细杆的初始温度为零，$x=0$ 端保持常温 u_0，在 $x=l$ 端和侧面上，热量可以发散到周围的介质中去，而介质的温度保持为零度．此时杆上的温度分布函数 $u(x,t)$ 满足下述定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b^2 u, \\ u(0,t)=u_0, \quad \left[\dfrac{\partial u}{\partial x}+hu\right]_{x=l}=0 \quad (b,\ h>0 \text{ 均为常数}), \\ u(x,0)=0, \end{cases}$$

试求出 $u(x,t)$．

§3 柯西问题

上节中我们以傅立叶级数为工具导出了热传导方程混合问题的解，类似地，本节中我们用傅立叶变换法求解热传导方程的柯西问题．关于傅立叶变换的概念及基本性质可参见附录二．

3.1 热传导方程的柯西问题

先考虑齐次热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & (3.1) \\ t=0:\ u=\varphi(x). & (3.2) \end{cases}$$

记 $u(x,t)$ 等关于 x 的傅立叶变换为

$$\tilde{u}(\lambda,t)=F[u(x,t)],$$

$$\tilde{\varphi}(\lambda)=F[\varphi(x)].$$

在(3.1)及(3.2)式两边分别对 x 进行傅立叶变换，利用傅立叶变换的性质，得到

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}+a^2\lambda^2\tilde{u}=0 \tag{3.3}$$

及

$$t=0: \tilde{u}=\tilde{\varphi}(\lambda). \tag{3.4}$$

(3.3)及(3.4)是带参数 λ 的常微分方程的柯西问题，其解为

$$\tilde{u}(\lambda, t)=\tilde{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

再求它的傅立叶逆变换就可得原柯西问题(3.1)、(3.2)的形式解为

$$u(x, t)=F^{-1}[\tilde{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}].$$

利用傅立叶变换的性质，并注意到 $F^{-1}[\tilde{\varphi}(\lambda)]=\varphi(x)$，就得

$$u(x, t)=\varphi(x)*F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}], \tag{3.5}$$

其中 $*$ 表示卷积.

函数 $e^{-a^2\lambda^2 t}$ 的傅立叶逆变换为

$$F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cdot e^{i\lambda x}\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}(\cos\lambda x+i\sin\lambda x)\,d\lambda.$$

由于 $e^{-a^2\lambda^2 t}\sin\lambda x$ 为 λ 的奇函数，在 $(-\infty, \infty)$ 上的积分为零，并注意到 $e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x$ 为 λ 的偶函数，且

$$\int_0^{\infty}e^{-\alpha\lambda^2}\cos\beta\lambda\,d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}\quad(\alpha>0).$$

就有

$$F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x\,dx$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

代入(3.5)，就得到柯西问题(3.1)、(3.2)的形式解为

$$u(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}d\xi. \tag{3.6}$$

对于非齐次热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x, t), & (3.7)\\ t=0:\ u=\varphi(x), & (3.8)\end{cases}$$

可以类似于混合问题利用迭加原理及齐次化原理来求得其形式解为

$$u(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi\, d\tau. \quad (3.9)$$

若直接对(3.7)的二端关于 x 进行傅立叶变换，也同样可得解的表达式(3.9)。

3.2 解的验证

在上面的推导中，由于预先不知道 u 是否满足进行傅立叶变换及有关运算的条件，所以得到的只是形式解．为证明形式解确实是问题的解，还得进行验证．

我们着重对齐次方程的情形进行验证．我们要证明：在 $\varphi(x)$ 连续且有界的条件下，由(3.6)式所给出的 $u(x, t)$ 确是柯西问题(3.1)、(3.2)的解．公式(3.6)通常称为*泊松*(Poisson)*公式*，其右端的积分称为*泊松积分*。

首先证明，当 $t>0$ 时，积分(3.6)所表达的函数 $u(x, t)$ 满足方程(3.1)．我们看到，如果视 ξ 为参量，积分号下的函数

$$U(x, t; \xi)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \quad (3.10)$$

对变量 t, x 而言，当 $t>0$ 时满足方程(3.1)．因此，我们只要证明，由(3.6)式给出的 u 对一切出现在方程(3.1)中的导数，在 $t>0$ 时均可通过在(3.6)式的积分号下求导的方法来计算．由于(3.6)式中的积分限是无穷的，为了保证求导在 $t>0$ 时能通过积分号，只须证明对任何 T 及 t_0 $(T>t_0>0)$，在积分号下求导后所得的积分在区域 $T\geqslant t\geqslant\delta$ 上是一致收敛的．以对 x 的一阶偏导数为例，由于

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{-(x-\xi)}{4a^3\pi^{1/2}t^{3/2}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}},$$

并设 $|\varphi(x)|\leqslant M$，就有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial U}{\partial x}\varphi(\xi)\right|d\xi\leqslant\frac{M}{4a^3\pi^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\zeta|}{t_0^{3/2}}e^{-\frac{\zeta^2}{4a^2T}}d\zeta,$$

这就说明了积分的一致收敛性．因此对 $t>0$ 成立

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial U}{\partial x}(x,t;\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

即对 x 求导一次能通过积分号．同理可以证明在 $t>0$ 时，(3.6)关于 x 及 t 的其它各阶偏导数均能通过在积分号下求导而得到．因此当 $t>0$ 时由积分(3.6)所表达的函数 $u(x,t)$ 满足方程(3.1)，并且是无穷次可微的．

再证明，由(3.6)式所确定的函数 $u(x,t)$ 满足初始条件(3.2)．即证明对任何 x_0，当 $t(>0)\to 0$，$x\to x_0$ 时，$u(x,t)\to\varphi(x_0)$．因此，要证明对任意给定的 $\varepsilon>0$，一定可找到 $\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$，$0<t<\delta$ 时，成立

$$|u(x,\ t)-\varphi(x_0)|<\varepsilon.$$

为此，在公式(3.6)中令 $\zeta=\dfrac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$，得到

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+2a\sqrt{t}\,\zeta)e^{-\zeta^2}d\zeta. \tag{3.11}$$

又由 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\zeta^2}d\zeta=\sqrt{\pi}$，$\varphi(x_0)$ 可写成

$$\varphi(x_0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_0)e^{-\zeta^2}d\zeta,$$

因此

$$u(x,\ t)-\varphi(x_0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x+2a\sqrt{t}\,\zeta)-\varphi(x_0)]e^{-\zeta^2}d\zeta.$$

对于所给的 $\varepsilon>0$．取 N 足够大，使

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{N}^{\infty}e^{-\zeta^2}d\zeta<\frac{\varepsilon}{6M},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-N}e^{-\zeta^2}d\zeta<\frac{\varepsilon}{6M}.$$

固定 N，由 $\varphi(x)$ 的连续性，可找到 $\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$，$0<t<\delta$ 时，成立

$$|\varphi(x+2a\sqrt{t}\,\zeta)-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(-N<\zeta<N),$$

因此

$$|u(x,t)-\varphi(x_0)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-N}^{N}|\varphi(x+2a\sqrt{t}\,\zeta)-\varphi(x_0)|e^{-\zeta^2}d\zeta$$

$$+\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-N}e^{-\zeta^2}d\zeta+\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_{N}^{\infty}e^{-\zeta^2}d\zeta$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-N}^{N}e^{-\zeta^2}d\zeta+4M\cdot\frac{\varepsilon}{6M}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

这样我们就证明了由泊松公式(3.6)所确定的函数 $u(x,t)$ 确实是柯西问题(3.1)、(3.2)的解.

此外,由 $|\varphi(x)|\leqslant M$, 从(3.11)式可得

$$|u(x,t)|\leqslant\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\zeta^2}d\zeta=M,$$

即解 $u(x,t)$ 具有和初值 $\varphi(x)$ 同样的有界性.

对于非齐次方程的情形,只要再假设 $f(x,t)$ 有界并适当光滑,也可以证明由(3.9)式表达的函数 $u(x,t)$ 确为问题(3.7)、(3.8)的解.

3.3 基本解

在解的积分表达式(3.9)中,我们看到函数

$$U(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\quad(t>\tau)\quad(3.12)$$

对于求解热传导方程的柯西问题(3.7)、(3.8)起着极重要的作用.在解齐次热传导方程的柯西问题时,只要在上述函数 $U(x,t;\xi,\tau)$ 中,令参数 $\tau=0$,乘以所给的初始条件 $\varphi(\xi)$,再对 ξ 从 $-\infty$ 到 ∞ 积分,即得问题的解;而在解具有齐次初始条件 $\varphi(x)=0$ 的非齐次热传导方程的问题时,只要将函数 $U(x,t;\xi,\tau)$ 乘以自由项 $f(\xi,\tau)$,再关于 ξ 从 $-\infty$ 到 ∞ 积分,关于 τ 从 0 到 t 积分,就得到问题的解.

函数 $U(x,t;\xi,\tau)$ 在区域 $\{-\infty<x<\infty,\ t>\tau\}$ 中(视 ξ 为参数)关于变量 x, t 满足齐次热传导方程,我们称它为热传导方程

(3.1)的基本解. 由(3.12)式, $U(x, t; \xi, \tau)$ 可以看成是两个独立变量$(x-\xi, t-\tau)$的函数:

$$U(x, t; \xi, \tau)=U_1(x-\xi, t-\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}, \tag{3.13}$$

其中

$$U_1(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \quad (t>0) \tag{3.14}$$

有时也称为热传导方程的基本解.

3.4 例

【例 3.1】 用傅立叶变换法求解下列柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & (3.15)\\ t=0: \ u=\varphi(x), \ u_t=\psi(x). & (3.16)\end{cases}$$

解 记

$$\tilde{u}(\lambda, t)=F[u(x, t)],$$
$$\tilde{\varphi}(\lambda)=F[\varphi(x)],$$
$$\tilde{\psi}(\lambda)=F[\psi(x)].$$

将方程(3.15)及初始条件(3.16)两端关于 x 进行傅立叶变换, 可得

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\tilde{u}}{dt^2}+a^2\lambda^2\tilde{u}=0,\\ t=0: \ \tilde{u}=\tilde{\varphi}, \ \dfrac{d\tilde{u}}{dt}=\tilde{\psi}.\end{cases}$$

由二阶常微分方程柯西问题的求解公式, 得

$$\tilde{u}(\lambda, t)=\tilde{\varphi}\cos a\lambda t+\frac{\tilde{\psi}}{a\lambda}\sin a\lambda t$$
$$=\tilde{u}_1(\lambda, t)+\tilde{u}_2(\lambda, t).$$

由傅立叶变换的性质(见附录二), 有

$$F[u_1(x, t)]=\tilde{u}_1(\lambda, t)=\tilde{\varphi}(\lambda)\cos a\lambda t$$
$$=\frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(\lambda)e^{-ia\lambda t}+\tilde{\varphi}(\lambda)e^{ia\lambda t}]$$

$$=\frac{1}{2}F[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$$

$$=F\left\{\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]\right\},$$

所以 $$u_1(x,\ t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)].$$

同理

$$F[u_2(x,\ t)]=\tilde{u}_2(\lambda,\ t)=\tilde{\psi}(\lambda)\frac{\sin a\lambda t}{a\lambda}$$

$$=\tilde{\psi}(\lambda)\frac{e^{ia\lambda t}-e^{-ia\lambda t}}{2a\lambda i}$$

$$=\frac{1}{2a\lambda i}F[\psi(x+at)-\psi(x-at)]$$

$$=\frac{1}{2a}F\left[\int_{-\infty}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi-\int_{-\infty}^{x-at}\psi(\xi)d\xi\right]$$

$$=F\left[\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi\right],$$

所以 $$u_2(x,\ t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi.$$

因此，柯西问题(3.15)、(3.16)的解为

$$u(x,\ t)=u_1(x,\ t)+u_2(x,\ t)$$

$$=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi. \qquad (3.17)$$

这就是著名的达朗贝尔(d'Alembert)公式，在第三章中我们还将用一个更简单的方法导得它.

由此可以看到傅立叶变换法不仅可用于求解一维热传导方程的柯西问题，还适用于求解其它类型的线性偏微分方程的柯西问题以及其它定解问题. 其求解步骤为：

(1) 将方程两边关于部分自变数进行傅立叶变换，导出未知函数 u 的傅立叶变换 $\tilde{u}$ 所满足的方程及初始条件（一般化为常微分方程的初值问题）.

(2) 求解 $\tilde{u}$ 所满足的常微分方程的初值问题，得出 $\tilde{u}$ 的表达

式.

(3) 用傅立叶逆变换公式求出 u 的表达式. 这是用傅立叶变换法来求解时较困难的步骤, 一般要利用傅立叶变换的性质或直接查傅立叶变换表及逆变换表而得.

习 题

1. 求解热传导方程(3.1)的柯西问题, 已知

(1) $u|_{t=0}=\sin x$;

(2) $u|_{t=0}=x^2+1$.

2. 求半无界直线上热传导方程下述问题的解:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0<x<\infty,\ t>0),\\ t=0:\ u=x^2 \quad (x>0),\\ x=0:\ u=0.\end{cases}$$

3. 用傅立叶变换法求解下述定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (y>0),\\ y=0:\ u=f(x),\\ \lim\limits_{r\to\infty} u(x,\ y)=0 \quad (r=\sqrt{x^2+y^2}).\end{cases}$$

§4 极值原理·解的唯一性和稳定性

4.1 极值原理

极值原理是描述扩散、传导等现象的热传导方程的一个重要特性. 以热传导过程为例, 如果物体的边界温度及其初始温度分布都不超过某个值 M, 而且物体内部没有热源, 则在这物体的内部就不可能达到大于 M 的温度. 和这个事实相对应, 我们对齐次热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{4.1}$$

证明下述的

定理 4.1 (有界区域上的极值原理) 设 R 为矩形区域 $\{\alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$, 其两个侧边 $\{x=\alpha$ 及 $x=\beta,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 及底边 $\{t=0,\ \alpha\leqslant x\leqslant\beta\}$ 所组成的边界曲线记为 Γ. 设 $u(x,\ t)$ 在 R 上

连续，在 $R\backslash\Gamma(\alpha<x<\beta,\ 0<t\leqslant T)$ 上满足热传导方程(4.1)，则它在 Γ 上取到其在 R 上的最大值和最小值．换言之，

$$\max_R u(x,\ t)=\max_\Gamma u(x,\ t), \tag{4.2}$$

$$\min_R u(x,\ t)=\min_\Gamma u(x,\ t). \tag{4.3}$$

证明 因为只要将 u 换成 $-u$，最小值情形可化成最大值情形来进行讨论，下面我们仅对最大值情形进行证明．

用反证法．以 M 表示函数 $u(x,\ t)$ 在 R 上的最大值，以 m 表示函数 $u(x,\ t)$ 在 Γ 上的最大值．如定理不真，则 $M>m$，因此在 R 内一定存在着一点 $(x^*,\ t^*)$ $(\alpha<x^*<\beta,\ 0<t^*\leqslant T)$，使函数 $u(x,\ t)$ 在该点取值 M：$u(x^*,\ t^*)=M$．此时由函数达极值的必要条件知成立

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x^*,\ t^*)\geqslant 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x^*,\ t^*)\leqslant 0,$$

因此，

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x^*,\ t^*)\geqslant 0.$$

若 $M>m$，我们将设法构造辅助函数 $g(x)$，使函数 $v=u(x,\ t)+g(x)$ 满足下述条件：

(i) 在 $R\backslash\Gamma$ $\{\alpha<x<\beta,\ 0<t\leqslant T\}$ 上处处成立

$$\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}<0. \tag{4.4}$$

(ii) v 不在 Γ 上达最大值．

如果这样的 $g(x)$ 存在，由(ii)，不妨设 v 在点 $(x_1,\ t_1)$ $(\alpha<x_1<\beta,\ 0<t_1\leqslant T)$ 上达最大值，则如上讨论可得

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)(x_1,\ t_1)\geqslant 0, \tag{4.5}$$

这就与 (4.4) 式发生矛盾．由此即可说明原假设 $M>m$ 不能成立．

于是，定理的证明归结为构造满足条件 (i)及(ii) 的辅助函数 $g(x)$．注意到 u 满足齐次热传导方程，(4.4)式相当于要求在 $\alpha<x<\beta$ 时成立 $g''(x)>0$．现特别取

$$g(x)-\frac{M-m}{4(\beta-\alpha)^2}(x-x^*)^2.$$

它显然满足条件(i)；且此时

$$v(x^*,\ t^*)=M,$$

而在 Γ 上

$$v(x,\ t)<m+\frac{M-m}{4}=\frac{M}{4}+\frac{3m}{4}<M,$$

因此这样作出的 v 也同时满足条件(ii)，定理得证.

推论 4.1 （顺序原理） 若函数 $u(x,\ t)$ 及 $v(x,\ t)$ 在 R 上连续，在 $R\backslash\Gamma$ 上满足齐次热传导方程，且 $v|_\Gamma\leqslant u|_\Gamma$，则在 R 上恒成立 $v\leqslant u$.

证明 记 $w=u-v$. 由迭加原理，$w(x,\ t)$满足齐次热传导方程，且 $\min\limits_{\Gamma} w\geqslant 0$. 由定理 4.1，在 R 上$w\geqslant 0$，即 $u\geqslant v$.

对于无界区域上热传导方程的解，我们有类似的极值原理.

定理 4.2 （无界区域上的极值原理） 函数 $u(x,\ t)$ 在区域 $0\leqslant t\leqslant T$ 上有界连续，在 $0<t\leqslant T$ 时满足齐次热传导方程 (4.1)，则成立

$$\sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\ -\infty<x<\infty}} u(x,\ t)=\sup_{-\infty<x<\infty} u(x,\ 0), \tag{4.6}$$

$$\inf_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\ -\infty<x<\infty}} u(x,\ t)=\inf_{-\infty<x<\infty} u(x,\ 0). \tag{4.7}$$

证明 只须证明(4.6)式. 记

$$M=\sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\ -\infty<x<\infty}} u(x,\ t),$$

$$m=\sup_{-\infty<x<\infty} u(x,\ 0).$$

设 $M>m$，用反证法. 令

$$v=u-\varepsilon(2a^2t+x^2), \tag{4.8}$$

其中 $\varepsilon>0$ 为任意常数，则 v 具有下列性质：

(i) $\dfrac{\partial v}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

(ii) $v|_{t=0}=u(x,\ 0)-\varepsilon x^2\leqslant u(x,\ 0)\leqslant m,$

(iii) 当 $x^2 \geqslant \dfrac{M-m}{\varepsilon}$ 时,

$$v(x,t)=u(x,t)-\varepsilon(2a^2t+x^2)\leqslant M-\varepsilon x^2\leqslant m.$$

记 $R_\varepsilon=\left\{(x,t)\,\middle|\,-\sqrt{\dfrac{M-m}{\varepsilon}}\leqslant x\leqslant\sqrt{\dfrac{M-m}{\varepsilon}},\ 0\leqslant t\leqslant T\right\}$,

并记 Γ_ε 为 R_ε 的两侧边及底边所组成的边界曲线. 由上述,

$$\max_{\Gamma_\varepsilon} v(x,t)\leqslant m,$$

因此由定理 4.1, 成立

$$\max_{R_\varepsilon} v(x,t)\leqslant m.$$

由 ε 的任意性, 就有

$$\sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\ -\infty<x<\infty}} v(x,t)\leqslant m,$$

于是,

$$u(x,t)=v(x,t)+\varepsilon(2a^2t+x^2)\leqslant m+\varepsilon(2a^2t+x^2).$$

令 $\varepsilon\to0$, 就有

$$\sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\ -\infty<x<\infty}} u(x,t)\leqslant m.$$

从而与假设 $M>m$ 矛盾, 定理证毕.

4.2 解的唯一性及稳定性

利用上面的极值原理, 我们立刻可得到下述的

定理 4.3 热传导方程的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\\ t=0:\quad u=\varphi(x),\\ x=\alpha:\quad u=\mu_1(t),\\ x=\beta:\quad u=\mu_2(t)\end{cases}\tag{4.9}$$

在区域 $R\{\alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ 0\leqslant t\}$ 上的解是唯一的, 而且连续地依赖于所给的初始条件和边界条件.

证明 任取 $T>0$, 在区域 $R=\{\alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 上考虑问题.

假设问题有两个解 u_1 及 u_2, 则它们的差 $u=u_1-u_2$, 在区域

$R\backslash\Gamma$ 上满足齐次方程(4.1)，而在 Γ 上为零．由定理 4.1，就得到在 R 上 $u\equiv 0$，即 $u_1\equiv u_2$．

其次，如果混合问题的两个解 u_2 和 u_2 在 Γ 上满足

$$|u_1-u_2|\leqslant\varepsilon,$$

则同理得到在 R 上也成立

$$|u_1-u_1|\leqslant\varepsilon.$$

由于 T 的任意性，这就证明了混合问题解的唯一性及稳定性．

定理 4.4 柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,\ t),\\ t=0:\ u=\varphi(x)\end{cases}\tag{4.10}$$

在有界函数类中的解是唯一的，而且连续依赖于所给的初始条件．

证明 此定理的证明方法与定理 4.3 的证明完全类似，请读者自行完成．

从定理 4.4 的证明过程易见，解 $u(x,\ t)$ 在整个区域 $t\geqslant 0$，$-\infty<x<\infty$ 上的有界性假设可以用如下较弱的假设来代替，仍能使热传导方程柯西问题的解的唯一性及稳定性成立．这个条件是：对于任何 $T>0$，存在一个仅与 T 有关的正常数 $M(T)$，使在区域 $0\leqslant t\leqslant T$，$-\infty<x<\infty$ 上成立

$$|u(x,\ t)|\leqslant M(T).\tag{4.11}$$

通过更加细致的讨论，还可以证明：只要对任何 $T>0$，存在仅与 T 有关的正常数 $M=M(T)$ 及 $C=C(T)$，使在区域 $0\leqslant t\leqslant T$，$-\infty<x<\infty$ 上成立

$$|u(x,\ t)|\leqslant Me^{Cx^2},\tag{4.12}$$

则柯西问题(4.10)的解 $u(x,\ t)$ 就是唯一的．

另一方面，对于任何 $\varepsilon>0$，吉洪诺夫(Тихонов)曾经作出过方程(4.1)的一个不恒等于零的解 $u(x,\ t)$，其初值为零，而当 $|x|\to\infty$ 时，$\max\limits_{0<t<T}|u(x,\ t)|e^{-\varepsilon x^{2+\varepsilon}}\to 0$．这说明在热传导方程柯西问题解的唯一性证明中，必须对解 u 在 x 趋于无穷时的增长性加以一定的

限制，而对解所在的函数类的上述限制(4.12)一般说来是必要的。必须指出，在应用中，上述这些限制条件通常是能够得到满足的。

习 题

1. 若 $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+cu\ (c\geqslant 0)$ 的解 u 的绝对值在矩形 R 的侧边 $x=\alpha$ 及 $x=\beta$ 上不超过 $B(\geqslant 0)$，在底边 $t=0$ 上不超过 $M(\geqslant 0)$，证明此时 u 在矩形 R 内满足不等式

$$|u(x,\ t)|\leqslant\max(Me^{ct},\ Be^{ct}),$$

并由此推出上述混合问题解的唯一性和稳定性。

2. 利用证明热传导方程极值原理的方法，证明满足调和方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的函数在任何有界闭区域上的最大值不会超过它在境界上的最大值。

3. 若 u 在 $R\{\alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 上连续，在 $R\setminus\Gamma$ 上关于 t 一阶连续可导，关于 x 二阶连续可导，且成立

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\leqslant 0,\\ u|_{\Gamma}\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 Γ 为 R 的边界曲线：$\{x=\alpha$ 及 $x=\beta,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 及 $\{t=0,\ \alpha\leqslant x\leqslant\beta\}$。试证明在 R 上恒成立 $u\leqslant 0$。

§5 高维热传导方程

在前面§§2～4中，对一维热传导方程的柯西问题与混合问题，我们已经比较详细地讨论了它们的求解方法与解的性质。现在我们指出，对于高维的热传导方程，可以采用和一维热传导方程类似的方法加以处理，其解的性质也与一维情形类似。

例如，对二维及三维齐次热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0, & (5.1)\\ t=0:\ u=\varphi(x,\ y) & (5.2)\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0, & (5.3)\\ t=0:\ u=\varphi(x,\ y,\ z), & (5.4)\end{cases}$$

同样可采用傅立叶变换法，类似地得到其解的表达式分别为

$$u(x, y, t)=\frac{1}{4a^2\pi t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi, \eta)e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}d\xi\,d\eta \quad (5.5)$$

及

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{8a^3(\pi t)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi, \eta, \zeta)$$
$$\times e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}d\xi\,d\eta\,d\zeta, \quad (5.6)$$

它们仍称为泊松公式．由此再利用齐次化原理也可得到非齐次热传导方程的柯西问题的解的表达式．

设 Ω 为二维空间中的一个有界区域，其边界为 Γ，在柱形区域 $Q=\bar{\Omega}\times[0, T]$ 上考虑二维齐次热传导方程(5.1)的解 $u=u(x, y, t)$．设 u 在 Q 上连续，在区域 $\Omega\times(0, T]$ 上满足方程(5.1)，则同样成立着极值原理：u 在 Q 上的最大、最小值一定在其侧边界 $\Sigma=\Gamma\times[0, T]$ 及底面 $\bar{\Omega}\times\{t=0\}$ 上达到．在无界区域 $(x, y)\in R^2$，$0\leqslant t\leqslant T$ 的情形，对于有界解也同样成立着与一维情形类似的极值原理，即 u 的最大、最小值一定在初始时刻 $t=0$ 达到．利用这极值原理同样可以证明带第一类边界条件

$$u|_\Gamma=\nu(x, y, t) \quad (5.7)$$

及初始条件

$$t=0:\ u=\varphi(x, y), \quad (x, y)\in\Omega \quad (5.8)$$

的混合问题的解的唯一性及稳定性，以及柯西问题的有界解的唯一性及稳定性．在三维的情形，情况是完全类似的．

方程(5.1)带齐次边界条件

$$u|_\Gamma=0 \quad (5.9)$$

及初始条件(5.8)的混合问题也同样可以利用分离变量法求解．此时，首先将变量 t 及变量 (x, y) 分离，即令

$$u=U(x, y)T(t), \quad (5.10)$$

就化为求解

$$U_{xx}+U_{yy}+\lambda U=0,\ U|_\Gamma=0 \quad (5.11)$$

及

$$T_t+\lambda a^2T=0. \quad (5.12)$$

其中 (5.11) 是一个拉普拉斯方程的特征值问题(即要求 λ, 使 (5.11) 存在非平凡解 $U=U(x, y)$). 如果区域 Ω 具有特殊的形状, 例如为矩形或圆域等等, 对它还可以用分离变量法来继续求解, 从而可最终得到原混合问题的形式级数解.

总之, 对热传导方程来说, 高维情形和一维情形没有本质上的区别, 这和下一章所讲的波动方程是很不相同的.

习 题

1. 用傅立叶变换法求解三维热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \\ t=0:\ u=\varphi(x, y, z). \end{cases}$$

2. 导出下列热传导方程柯西问题解的表达式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \\ t=0:\ u=\varphi(x, y)=\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(y). \end{cases}$$

3. 解混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (t>0,\ 0<x<\alpha,\ 0<y<\beta), \\ t=0:\ u=A \quad (A\ \text{为常数}), \\ x=0:\ u=0, \\ x=\alpha:\ u_x=0, \\ y=0:\ u_y=0, \\ y=\beta:\ u=0. \end{cases}$$

第三章

波动方程

在这一章中我们将介绍一类典型的双曲型方程——波动方程，它可用来描述弹性体的振动、声波、电磁波等波动的传播．我们将讨论这类方程的初值问题及混合问题的适定性．对初值问题可以给出其解的表达式．对混合问题则利用能量方法证明其解的唯一性和对已给资料的连续依赖性；特别在一维的情况，还可用分离变量法来证明其解的存在性并给出其级数表达式．对波动方程的解的性质及其物理意义也进行了讨论．由于不同维数的波动方程之间有很大的不同，在前3节中研究一维波动方程——弦振动方程，而在后4节中则讨论高维波动方程．

§1 弦振动方程及其定解条件

1.1 弦振动方程的导出

考察一根张紧着的均匀弦，设其平衡位置为x轴，并设弦在其平衡位置附近作微小横振动．这儿，所谓弦是指一根可以自由弯曲的纤细的线，而一根张紧着的弦的横振动是指其振动发生在一个平面内，且弦上各点的位移和弦的平衡位置垂直．以$u=u(x, t)$表示弦上一点x在t时刻离开平衡位置的位移，而振动就发生在(x, u)平面内．由于只限于考察微小的横振动，即设$\frac{\partial u}{\partial x}$很小，因此，在讨论过程中，$\frac{\partial u}{\partial x}$的高阶项可以忽略不计．于是原先长度为$dx$的一段弦，在振动中的长度$\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}dx\approx dx$，从而，在所考虑的精度范围内，在振动过程中任一段弦的长度均保持不变．

我们知道，在张紧着的弦上的每一点都受到张力的作用．由于弦不抵抗弯曲，在点 x 的张力是由于拉伸作用而产生的，因此，它必沿着弦在此点的切线方向．必须注意，张力是一个内力，弦在任一内点 x 处的张力是指弦在此点的左侧（或右侧）部分对右侧（或左侧）部分的拉力．由作用和反作用定律，这两个力大小相等方向相反．我们可以 x 及 t 的正值函数 $T(x, t)$ 来表示时刻 t 在点 x 处的张力大小．设弦在平衡位置时各点的张力为 T_0（常数），它和弦的质地及张紧的程度有关．由于在微小横振动过程中任一段弦的长度改变可以忽略不计，根据虎克 (Hooke) 定律，弦上各点张力的大小不随时间而改变，始终近似地保持为常数 T_0．因此，可设 $T(x, t)=T_0$．

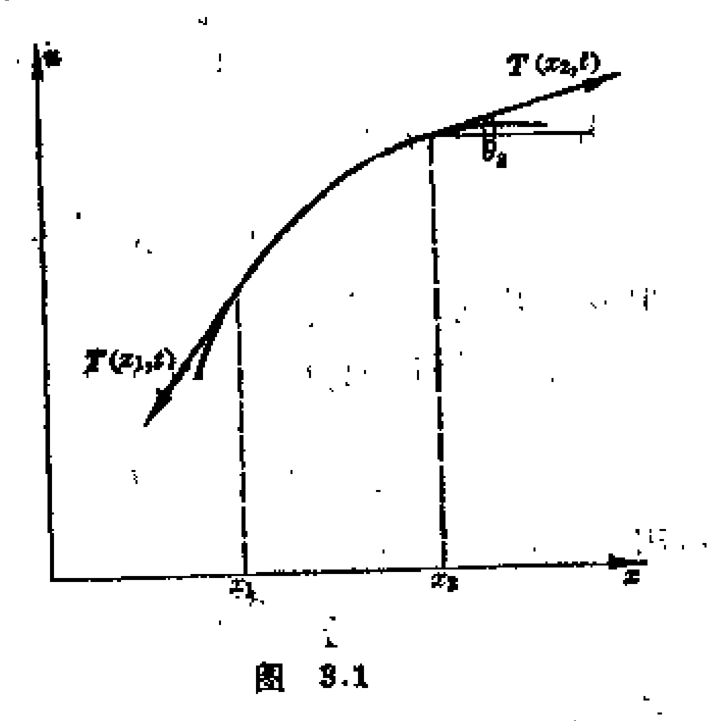


图 3.1

现在来推导弦的位移 $u(x, t)$ 所满足的偏微分方程．为此任意截取一段弦 $[x_1, x_2]$，并沿着 u 方向考察其上的受力情况．

在点 x_2 处的张力（即在 x_2 右端的弦对此段弦的拉力）在 u 方向的投影为（参见图 3.1）

$$T_0 \sin\theta_2 = T_0 \frac{\operatorname{tg}\theta_2}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta_2}} = T_0 \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_2, t)}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_2, t)\right)^2}}$$

$$\approx T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t),$$

其中 θ_2 为此点弦的切线的倾角；类似地，在点 x_1 处的张力在 u 方向的投影为 $-T_0\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_1, t)$．于是，若设 u 对 x 二次连续可微，此

段弦上张力的合力在 u 方向的投影为

$$T_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t)\right)$$

$$=T_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)dx. \tag{1.1}$$

设沿 u 方向作用在弦上的外力的线密度为 $F(x, t)$，则此段弦所受的外力为

$$\int_{x_1}^{x_2}F(x, t)dx. \tag{1.2}$$

此外，此段弦在振动过程中所受的惯性力为

$$-\int_{x_1}^{x_2}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)dx, \tag{1.3}$$

其中 ρ 为弦的线密度.

这样，根据达朗贝尔原理，就得到

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+F\right)dx=0. \tag{1.4}$$

再由于 $[x_1, x_2]$ 的任意性，就得到

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+F=0.$$

于是，若令

$$a^2=\frac{T_0}{\rho},\ f(x, t)=\frac{F(x, t)}{\rho}, \tag{1.5}$$

就得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x, t), \tag{1.6}$$

这里 $f(x, t)$ 表示时刻 t 在点 x 处单位质量弦所受的外力.

方程(1.6)就是在外力作用下弦的位移 $u(x, t)$ 所满足的偏微分方程. 在弦不受外力作用时(此时 $F\equiv 0$)，方程(1.6)变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \tag{1.7}$$

它是弦的自由振动方程，通称为弦振动方程或一维波动方程. 而(1.6)是弦的强迫振动方程，称为非齐次弦振动方程或非齐次一维波动方程.

1.2 弦振动方程的定解条件

从物理上考虑，为了确定弦的振动过程，只有方程 (1.6) 或 (1.7) 是不够的，还必须指定在初始时刻弦的位移 u 与弦的速度 u_t，即初始条件，以及弦在两个端点（设为 $x=0$ 及 $x=l$）的性态，即边界条件。

设初始时刻为 $t=0$，那么初始条件应取如下形式：

$$t=0:\quad u=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}=\psi(x)\quad (0\leqslant x\leqslant l). \tag{1.8}$$

和热传导方程的情况类似，此时边界条件可以有如下几种不同的形式。

如果弦的两端是固定的，那么相应的边界条件应为

$$x=0\ \text{及}\ x=l:\ u=0. \tag{1.9}$$

这种类型的边界条件称为第一类边界条件或狄利克雷边界条件。

如果弦的端点是自由的，即弦在端点不受垂直方向的外力作用，此时在端点处的张力在 u 方向的分量为零，其相应的边界条件应为

$$x=0\ \text{及}\ x=l:\ \frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{1.10}$$

这种类型的边界条件称为第二类边界条件或诺伊曼边界条件。

还可以考虑将弦的端点固定在弹性支承上的情况。设弹性支承的平衡位置为 $u=0$，于是 u 在端点的值表示此弹性支承在该点的伸长，从而由虎克定律，支承的弹性力为 ku，其中常数 $k>0$ 为支承的弹性系数（或称杨氏模量）。这个支承的弹性力应与弦对支承的拉力即弦在端点的张力在 u 方向的分量相平衡。例如在 $x=0$ 这一端，由于弦的张力在 u 方向的分量（它表示 $x=0$ 右端的弦对支承的拉力）为 $T_0\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}$，就得到

$$x=0:\quad T_0\frac{\partial u}{\partial x}=k_1u,$$

其中 k_1 为 $x=0$ 处弹性支承的弹性系数。因此，在弹性支承情形

的边界条件应为

$$x=0:\ \frac{\partial u}{\partial x}-\sigma_1 u=0, \tag{1.11}$$

其中记

$$\sigma_1=\frac{k_1}{T_0}>0.$$

同样，在 $x=l$ 处的弹性支承所相应的边界条件为

$$x=l:\ \frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_2 u=0, \tag{1.12}$$

其中 σ_2 为一正常数．这种类型的边界条件称为**第三类边界条件**．

当然，在弦的两端点 $x=0$ 与 $x=l$ 处，也可以有不同类型的边界条件．譬如，弦一端是固定的，弦的另一端是弹性支承的等等．此外，还可以考虑相应的非齐次边界条件．

求方程(1.6)或(1.7)满足初始条件(1.8)与第一(或第二、三)类边界条件的解，这种定解问题称为弦振动方程的**第一(或第二、三)类混合初-边值问题**，简称为**混合问题**．

现在来讨论一种极端的情况．设弦极长，而我们所要考察的一部分弦离边界又极远，这样，须要经过一段相当长的时间后，边界条件才能对这部分弦发生影响（这个事实在下节中将会得到详细的说明）．因此，如果只在一段不太长的时间中关心这一部分弦上的振动情况，我们就可以不必考虑边界的影响，而在无界区域 $t\geqslant 0,\ -\infty<x<\infty$ 上求弦振动方程(1.6)或(1.7)满足初始条件

$$t=0:\ u=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}=\psi(x) \tag{1.13}$$

的解．这个问题称为**初值问题**或**柯西问题**．

习　　题

1．弹性细杆因某种外界原因而产生纵向振动，以 $u(x,t)$ 表示静止时 x 处的点在时刻 t 离开原来位置的位移．假设振动过程服从虎克定律，试证明 $u(x,t)$ 满足方程

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

其中 ρ 为杆的密度，E 为杨氏模量．

2. 在杆作纵振动时，假设：a) 端点固定；b) 端点自由；c) 端点固定在弹性支承上，试分别就这三种情况写出所对应的边界条件。

3. 弹性细杆的一端刚性地固定着，而另一端则受到与速度成正比的阻力的作用，试写出此杆的微小纵振动所满足的混合问题。

4. 设弦的两端固定，试写出在阻力与速度成正比的介质中弦的微小横振动所满足的混合问题。

5. 设均匀而柔软的重弦其上端固定，下端自由，试写出弦关于铅直平衡位置的微小横振动所满足的混合问题。

6. 设具有截头圆锥形状的弹性杆的两端固结，并在时刻 $t=0$，给杆上的点以初始纵向位移与速度，使杆失去静止状态而发生纵振动。设杆的长度为 L，底半径分别为 R、$r(R>r)$，若在振动中不计横截面的形变，试写出此杆的微小纵振动所满足的混合问题。

§2 弦振动方程的柯西问题

2.1 行波法

考察自由弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{2.1}$$

由第一章我们知道，方程(2.1)的特征线是两族直线：

$$x-at=c_1,\ x+at=c_2, \tag{2.2}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数．取这两族特征线为新的坐标曲线，即作自变数变换

$$\xi=x-at,\ \eta=x+at, \tag{2.3}$$

方程(2.1)立即变为只含二阶混合偏导数的下述标准形式：

$$u_{\xi\eta}=0. \tag{2.4}$$

将方程(2.4)先对 η 积分一次，再对 ξ 积分一次，容易看出其解的一般形式为

$$u=F(\xi)+G(\eta). \tag{2.5}$$

回到原来的变数 x 及 t，立即得到方程(2.1)的解的一般形式即其通解为

$$u(x,\ t)=F(x-at)+G(x+at), \tag{2.6}$$

其中 F 及 G 为任意的单变数的二阶连续可微函数.

由(2.6)式可见,自由弦振动方程(2.1)的解可以表示为形如 $F(x-at)$ 与 $G(x+at)$ 的两个函数之和. 方程(2.1)的形如 $u=F(x-at)$ 或 $u=G(x+at)$ 的解称为行波. 其中 $u=F(x-at)$ 表示一个在初始时刻 $t=0$ 时为 $u=F(x)$ 的波形,以速度 $a>0$ 向右(即 x 轴正向)传播,而波形保持不变,它称为*右传播波*; 而 $u=G(x+at)$ 则表示以速度 a 向左传播的波,称为*左传播波*. 弦振动方程的通解表达式(2.6)式说明,弦上的任意扰动总是以行波的形式向左右两个方向传播出去. 下面我们可以看到,通过把方程(2.1)的解表示为向两个方向传播的行波之和,即表示为右传播波和左传播波的迭加,可用来求一些定解问题的解. 这个方法称为*行波法*.

2.2 达朗贝尔公式

现在用行波法来求解弦振动方程的柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\ \ (t>0,\ -\infty<x<\infty), & (2.7)\\ t=0:\ \ u=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=\psi(x)\ (-\infty<x<\infty). & (2.8)\end{cases}$$

为此,要适当选取函数 F 及 G,使由(2.6)式给出的解满足初始条件(2.8). 将(2.6)代入(2.8),立即可得

$$F(x)+G(x)=\varphi(x), \tag{2.9}$$

$$-aF'(x)+aG'(x)=\psi(x). \tag{2.10}$$

将(2.9)式两端关于 x 求导一次得

$$F'(x)+G'(x)=\varphi'(x). \tag{2.11}$$

由(2.10)、(2.11)两式解得

$$F'(x)=\frac{1}{2a}(a\varphi'(x)-\psi(x)),$$

$$G'(x)=\frac{1}{2a}(a\varphi'(x)+\psi(x)).$$

再将以上两式关于 x 积分一次就得到

$$F(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(\xi)d\xi+c_1, \tag{2.12}$$

$$G(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(\xi)d\xi+c_2, \tag{2.13}$$

其中 c_1 与 c_2 是常数. 由(2.9),应有

$$c_1+c_2=0. \tag{2.14}$$

将(2.12)、(2.13)式代入(2.6),并注意到(2.14),就得到

$$u(x, t)=\frac{1}{2}(\varphi(x-at)+\varphi(x+at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi. \tag{2.15}$$

这个公式称为达朗贝尔公式.

由前面的推导过程可以看出, 如果柯西问题 (2.7)、(2.8) 有解,那么此解一定可以由达朗贝尔公式(2.15)给出,因此解一定是唯一的. 反之,若 $\varphi\in C^2(R)$, $\psi\in C^1(R)$, 那么容易直接验证由达朗贝尔公式 (2.15) 给出的 $u(x, t)$ 确为柯西问题(2.7)、(2.8) 的解. 这样我们就得到如下的

定理 2.1 设 $\varphi\in C^2(R)$, $\psi\in C^1(R)$, 那么柯西问题 (2.7)、(2.8)存在着唯一的解 $u(x, t)$, 且此解由达朗贝尔公式 (2.15) 给出.

如果初始资料 φ 及 ψ 不满足定理 2.1 的条件, 譬如说 $\varphi\in C^1(R)$, $\psi\in C^0(R)$, 那么由达朗贝尔公式给出的 $u(x, t)$ 仍有意义. 它不是柯西问题 (2.7)、(2.8) 在经典意义下的解, 而可视为一种广义解.

2.3 依赖区间、决定区域与影响区域

由达朗贝尔公式(2.15)立即可以看出,柯西问题(2.7)、(2.8)的解在上半平面 $t\geqslant 0$ 上一点 (x, t) 处的值 $u(x, t)$ 由初始资料 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 在 x 轴的区间 $[x-at, x+at]$ 上的值所唯一确定, 而与 φ 及 ψ 在该区间外的值无关. 这个区间称为点 (x, t) 的依赖区间(见图 3.2),它是过 (x, t) 点的两条特征线交截 x 轴所得的区间.

这样,对初始直线 $t=0$ 上的一个区间 $[x_1, x_2]$,过点 x_1 作特征线 $x=x_1+at$, 过点 x_2 作特征线 $x=x_2-at$, 它们和区间 $[x_1, x_2]$ 一

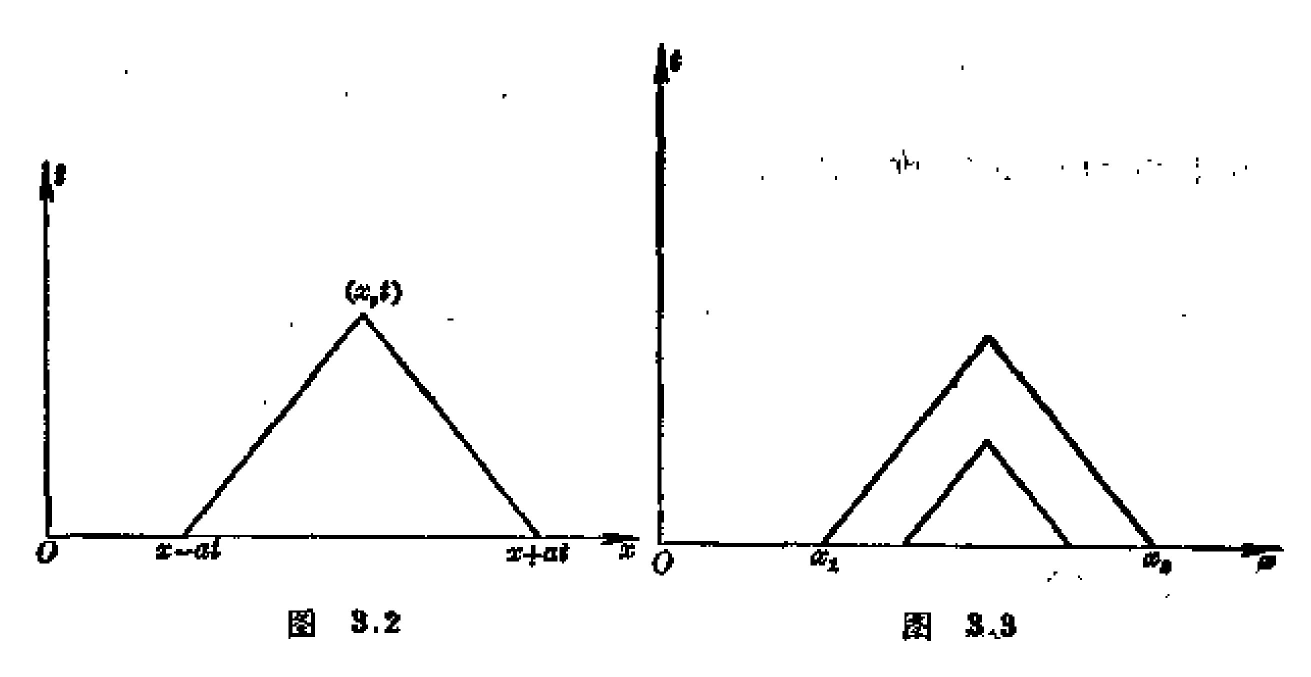


图 3.2　　　图 3.3

起构成一个三角形区域(图 3.3)，在此区域中的任一点(x, t)，其依赖区间都包含在区间$[x_1, x_2]$中，因此解在此三角形区域中的值完全由区间$[x_1, x_2]$上所给的初始条件决定而与此区间外的初始条件无关．这个三角形区域就称为区间$[x_1, x_2]$的**决定区域**．给定区间$[x_1, x_2]$上的初始条件，就可以在其决定区域中决定相应的柯西问题的解．

另一方面，给定 x 轴上一点$(x_0, 0)$，初始资料 φ 及 ψ 在该点的值如有变动，将对解 $u(x, t)$在哪些点的值产生影响呢？容易看到，它只对由此点$(x_0, 0)$向 t 增加的方向发出的两条特征线所围成的区域中的解值产生影响．这是因为这个区域内任一点的依赖区间都包含$(x_0, 0)$点，而在这个区域外任一点的依赖区间都不包含$(x_0, 0)$点．由过$(x_0, 0)$向 t 增加的方向作出的两条特征线所围成的这个区域就称为点$(x_0, 0)$的**影响区域**(见图 3.4)．这说明在初始直线 $t=0$ 上某点处的扰动或信号是以有限速度 a 向两侧传播的．扰动以有限速度(沿着特征线)传播，是双

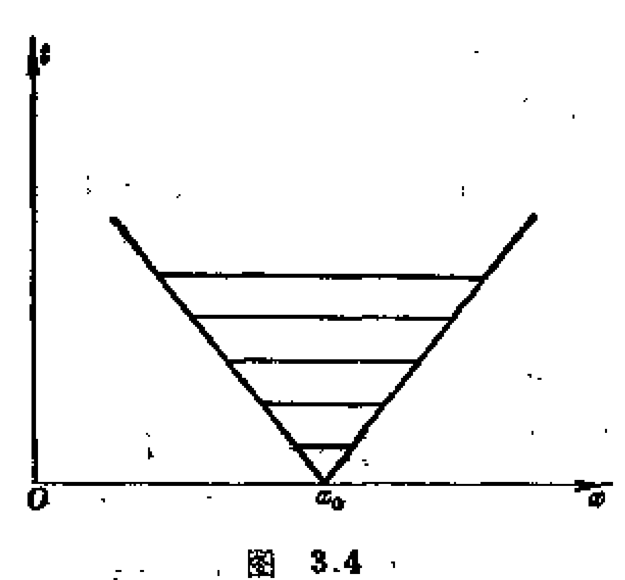


图 3.4

曲型方程的一个重要特点.

2.4 例

【例 2.1】 现在用行波法来求解一端固定的半有界弦的自由振动问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad (t>0,\ 0<x<\infty), & (2.16)\\ t=0:\quad u=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=\psi(x) \quad (0\leqslant x<\infty), & (2.17)\\ x=0:\quad u=0; & (2.18)\end{cases}$$

为了求解此问题, 我们可以设想在 $x=0$ 的左侧仍然有弦存在, 只是在振动的过程中, $x=0$ 这一点始终保持不动. 这样考虑的一个无界弦的自由振动问题显然和原先所考虑的固定端点的半有界弦的自由振动问题是等价的. 现在的问题于是化为: 如何将在 $x\geqslant 0$ 上已给的初始数据延拓为整个直线 $-\infty<x<\infty$ 上的函数, 使得用延拓后的函数作初值的柯西问题, 其解在 $x=0$ 处恒为零.

设 $\Phi(x)$ 及 $\Psi(x)$ 是由 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 分别延拓而得的函数. 由达朗贝尔公式, 以 $\Phi(x)$ 及 $\Psi(x)$ 为初值的柯西问题的解为

$$U(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi. \tag{2.19}$$

因此, 要使 $U(x,t)$ 在 $x=0$ 处恒为零, 要求成立

$$\frac{1}{2}(\Phi(at)+\Phi(-at))+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\Psi(\xi)d\xi=0.$$

为此, 只要将 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 作奇延拓, 即令

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & (x\geqslant 0),\\ -\varphi(-x) & (x<0),\end{cases} \tag{2.20}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x) & (x\geqslant 0),\\ -\psi(-x) & (x<0),\end{cases} \tag{2.21}$$

就可达到要求.

于是，将由(2.20)、(2.21)定义的函数 $\Phi(x)$ 及 $\Psi(x)$ 代入(2.19)式，即得问题(2.16)～(2.18)的解为

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)] \\ \qquad +\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \quad (x\geqslant at), \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)] \\ \qquad +\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \quad (0\leqslant x<at). \end{cases} \tag{2.22}$$

由上述解的表达式可见，在区域 $x\geqslant at$ 上，边界条件(2.18)不起作用，解的表达式与柯西问题的解的表达式相同. 这是因为过原点的特征线方程为 $x=at$，因此区域 $x\geqslant at$ 是半直线 $x\geqslant 0$ 的决定区域，解在该区域上的值由初始条件(2.17)所唯一确定. 而在区域 $0\leqslant x<at$ 上，则必须考虑边界条件(2.18)的影响，而出现波的反射现象.

2.5 非齐次弦振动方程的柯西问题

现在考察非齐次弦振动方程的柯西问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \quad (t>0,\ -\infty<x<\infty), & (2.23) \\ t=0:\ \ u=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}=\psi(x) \quad (-\infty<x<\infty). & (2.24)\end{cases}$$

利用迭加原理，这个问题可化为前面已考察过的齐次弦振动方程的柯西问题(2.7)、(2.8)以及下述非齐次弦振动方程的柯西问题来分别求解：

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \quad (t>0,\ -\infty<x<\infty), & (2.25) \\ t=0:\ \ u=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}=0 \quad (-\infty<x<\infty). & (2.26)\end{cases}$$

为了求解柯西问题(2.25)、(2.26)，和热传导方程的情形类

似,可利用齐次化原理化为求解相应的齐次方程的柯西问题.

定理 2.2(齐次化原理) 设 $w=w(x, t; \tau)$是下述齐次弦振动方程的柯西问题的解(τ 为参数):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad (t>\tau), & (2.27)\\ t=\tau:\ w=0,\ \dfrac{\partial w}{\partial t}=f(x, \tau), & (2.28)\end{cases}$$

那么

$$u(x, t)=\int_0^t w(x, t; \tau)d\tau \tag{2.29}$$

就是问题(2.25)、(2.26)的解.

证明 由(2.28),有

$$w(x, t; t)=0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t; t)=f(x, t),$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x, t; \tau)d\tau, \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t; \tau)d\tau+f(x, \tau), \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t; \tau)d\tau. \tag{2.32}$$

由(2.31)及(2.32)即得 $u(x, t)$满足非齐次弦振动方程(2.25);又由(2.29)及(2.30),易见 u 满足齐次初始条件(2.26). 定理证毕.

由达朗贝尔公式知,柯西问题(2.27)、(2.28)的解为

$$w(x, t; \tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)d\xi. \tag{2.33}$$

于是利用齐次化原理即得柯西问题(2.25)、(2.26)的解为

$$\begin{aligned} w(x, t)&=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)d\xi d\tau\\ &=\frac{1}{2a}\iint_G f(\xi, \tau)d\xi d\tau, \end{aligned} \tag{2.34}$$

其中 G 为(ξ, τ)平面上由过点 (x, t) 向下作的两条特征线与 ξ 轴

所围的三角形区域(见图 3.5)。

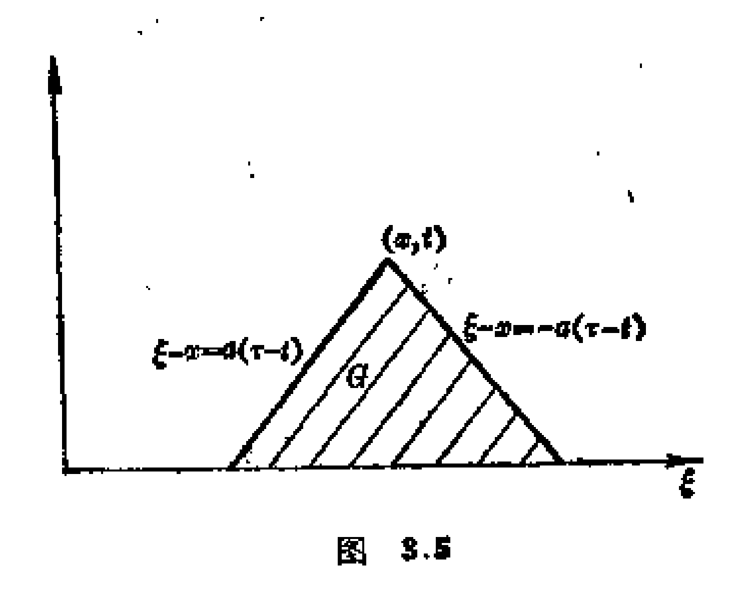


图 3.5

习 题

1. 设 $ABCD$ 为 (x, t) 平面上由特征线所围成的平行四边形, u 为自由弦振动方程的解, 证明:

$$u(A)+u(C)=u(B)+u(D).$$

2. 在初始资料 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 满足什么条件时, 自由弦振动方程的解仅由右传播波组成?

3. 利用行波法, 求解弦振动方程的古尔萨(Goursat)问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad (0<t, \ -at<x<at), \\ u|_{x-at=0}=\varphi(x), \\ u|_{x+at=0}=\psi(x) \quad (\varphi(0)=\psi(0)). \end{cases}$$

4. 求解如下半有界弦的定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad (t>0, \ x>0), \\ u(x, 0)=\varphi(x), \ u_t(x, 0)=\psi(x), \\ u_x(0, t)=0. \end{cases}$$

5. 求方程

$$u_{tt}-u_{xx}=0 \quad \left(t>0, \ x>\frac{t}{k}\right)$$

满足如下定解条件的解:

$$t=0: \ u=\varphi_0(x), \ u_t=\varphi_1(x) \quad (x\geqslant 0),$$
$$t=kx: \ u=\psi(x) \quad (x\geqslant 0),$$

其中 $k>1$ 为常数, 且成立 $\varphi_0(0)=\psi(0)$.

6. 求解下列柯西问题:

(1) $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=t\sin x, \\ t=0:\ u=0,\ u_t=\sin x. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=x^2, \\ t=0:\ u=x,\ u_t=0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\dfrac{tx}{(1+x^2)^2}, \\ t=0:\ u=0,\ u_t=\dfrac{1}{1+x^2}. \end{cases}$

§3 弦振动方程的混合问题

在本节中，我们将考察弦振动方程的如下混合问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t) \quad (t>0,\ 0<x<l), \\ t=0:\ u=\varphi(x),\ u_t=\psi(x) \quad (0<x<l), \\ x=0:\ u=\mu_1(t), \\ x=l:\ u=\mu_2(t). \end{cases} \tag{3.1}$$

和热传导方程的混合问题类似，只要引入一个简单的未知函数变换，总可以化为齐次边界条件的情形. 再利用迭加原理及齐次化原理，可知重点应讨论齐次弦振动方程带非齐次初始条件及齐次边界条件的如下的混合问题：

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad (t>0,\ 0<x<l), \tag{3.2}$$

$$t=0:\ u=\varphi(x),\ u_t=\psi(x) \quad (0<x<l), \tag{3.3}$$

$$x=0\ \text{及}\ x=l:\ u=0. \tag{3.4}$$

3.1 能量积分与解的唯一性

设 u 为混合问题(3.2)～(3.4)的解，以 u_t 乘方程(3.2)的两端，然后关于 x 从 0 到 l 积分得

$$\int_0^l u_tu_{tt}\,dx-a^2\int_0^l u_tu_{xx}\,dx=0. \tag{3.5}$$

注意到由边界条件(3.4)可得

$$x=0\ \text{及}\ x=l:\ u_t=0,$$

对(3.5)式左端第二项的积分进行分部积分，就得到

$$\int_0^l u_t u_{xx}\,dx = u_t u_x\Big|_0^l - \int_0^l u_{xt} u_x dx$$

$$= -\int_0^l u_{xt} u_x\,dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l u_x^2\,dx.$$

将它代入(3.5)式，并注意到

$$\int_0^l u_t u_{tt}\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l u_t^2\,dx,$$

可得

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0, \tag{3.6}$$

其中

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l (u_t^2 + a^2 u_x^2)\,dx. \tag{3.7}$$

可以证明，在时刻 t，弦的动能及势能分别为

$$\frac{\rho}{2}\int_0^l u_t^2 dt \quad 及 \quad \frac{T_0}{2}\int_0^l u_x^2\,dx,$$

因此，(相差一个常数因子 ρ) $E(t)$ 就表示在 t 时刻弦的动能与势能之和，即总能量，通常称之为能量积分．(3.6)式表明，对两端固定的弦来说，在没有外力作用的情况下，在振动过程中能量积分 $E(t)$ 的值不随时间改变，它反映了弦在振动中能量保持守恒的规律．这样我们就得到

定理 3.1　设 $u=u(x,t)$ 是弦振动方程混合问题 (3.2)～(3.4)的解，那么在振动过程中能量积分 $E(t)$ 保持不变，即成立

$$E(t) = E(0) = \int_0^l [\psi^2(x) + a^2\varphi'^2(x)]\,dx. \tag{3.8}$$

由定理 3.1 立即可得如下的唯一性定理．

定理 3.2　弦振动方程的混合问题(3.1)至多只有一个解．

证明　因为混合问题(3.1)是线性的定解问题，所以要证明其解的唯一性，只要证明下面的齐次定解问题只有零解：

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0; & (3.9) \\ t=0:\ v=0,\ v_t=0, & (3.10) \\ x=0 \ 及\ x=l:\ v=0. & (3.11) \end{cases}$$

由定理 3.1，对任何 $t\geqslant 0$，均有

$$\frac{1}{2}\int_0^l (v_t^2+a^2v_x^2)\,dx=0. \tag{3.12}$$

因 $a^2>0$，由上式立即得到在整个区域 $t\geqslant 0$，$0\leqslant x\leqslant l$ 上，

$$v_t(x,\ t)\equiv 0,\ v_x(x,\ t)\equiv 0, \tag{3.13}$$

所以

$$v(x,\ t)\equiv\text{常数}. \tag{3.14}$$

再注意到初始条件(3.10)，立刻得到

$$v(x,\ t)\equiv 0.$$

定理证毕.

3.2 解的存在性

理在我们利用分离变量法来证明混合问题(3.2)～(3.4)的解的存在性. 这个方法是构造性的. 它不仅能用来证明解的存在性，还能提供一种求解(或近似解)的方法.

先求方程(3.2)的形如

$$u(x,\ t)=X(x)T(t) \tag{3.15}$$

的解. 将其代入(3.2)并分离变量得

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}. \tag{3.16}$$

这个等式只有两边等于同一常数时才能成立，令此常数为 $-\lambda$，于是得到

$$T''+\lambda a^2T=0, \tag{3.17}$$

$$X''+\lambda X=0. \tag{3.18}$$

注意到边界条件(3.4)，X 还应满足齐次边界条件：

$$X(0)=X(l)=0. \tag{3.19}$$

对常微分方程的特征值问题(3.18)、(3.19)，由第二章§2知，其特征值为

$$\lambda_k=\frac{k^2\pi^2}{l^2}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots), \tag{3.20}$$

而其相应的特征函数为

$$X_k=\sin\frac{k\pi}{l}x \quad (k=1,\ 2,\ \cdots). \tag{3.21}$$

将由(3.20)式给出的特征值 λ_k 代入关于 T 的方程(3.17)，得

$$T''+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T=0 \quad (k=1,\ 2,\ \cdots), \tag{3.22}$$

其通解为

$$T_k(t)=A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t \quad (k=1,\ 2,\ \cdots), \tag{3.23}$$

其中 A_k, B_k 为任意常数.

这样，就得到方程(3.2)满足齐次边界条件(3.4)的一列分离变量的特解

$$\begin{aligned}U_k(x,\ t)&=X_k(x)T_k(t)\\&=\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x\\&\qquad (k=1,\ 2,\ \cdots).\end{aligned} \tag{3.24}$$

将它们迭加，即得

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{3.25}$$

现在我们要适当选择常数 A_k 及 $B_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$，使 $u(x,\ t)$ 满足初始条件(3.3).

将(3.25)对 t 形式求导一次，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\Big(&-A_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\\&+B_k\cos\frac{k\pi a}{l}t\Big)\sin\frac{k\pi}{l}x.\end{aligned} \tag{3.26}$$

要满足初始条件(3.3)，由(3.25)及(3.26)应该有

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{3.27}$$

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{3.28}$$

因此，A_k 及 $B_k\frac{k\pi a}{l}$ $(k=1,2,\cdots)$ 应该分别是 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 在 $[0,l]$ 上按特征函数系 $\left\{\sin\frac{k\pi}{l}x\right\}$ 展开的傅立叶级数的系数，即

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\,d\xi, \tag{3.29}$$

$$B_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\,d\xi. \tag{3.30}$$

将(3.29)及(3.30)代入(3.25)，就得到所考察的混合问题的形式解.

定理 3.3 设初始数据 φ 及 ψ 满足

$$\varphi\in C^3[0,l],\ \psi\in C^2[0,l], \tag{3.31}$$

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=\psi(0)=\psi(l)=0, \tag{3.32}$$

那么弦振动方程的混合问题(3.2)～(3.4)的解存在.

证明 由上述分离变量法的求解知，我们只要证明由(3.29)、(3.30)所确定的级数(3.25)以及此级数关于 x, t 逐项求导二次后所得的级数是一致收敛的. 为此易知只要证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2(|A_k|+|B_k|)<\infty. \tag{3.33}$$

但注意到条件(3.31)及(3.32)，利用附录一中的结果，立即可得(3.33)式，定理证毕.

在实际问题中所提出的初始资料 φ 及 ψ 不一定能满足定理3.3中所要求的条件，此时级数(3.25)所给出的函数就不一定是经典意义下的解. 但在适当的条件下，采用级数(3.25)作为混合问题(3.2)～(3.4)的解，仍能满足实际应用上的需要，此时称其为广义解.

下面我们结合弦振动的物理模型说明分离变量法的物理意义. 级数(3.25)中的每一项可写为如下的形式：

$$U_k(x,t)=N_k\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\left(\frac{k\pi a}{l}t+\alpha_k\right)$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots),$$

其中 N_k 为某个常数．弦的这种形态的振动称为驻波，在其振动过程中，点 $x=\frac{h}{k}l(h=0,\ 1,\ \cdots,\ k)$ 始终保持静止状态，而弦上的每点均以相同的圆频率

$$\omega_k=\frac{k\pi a}{l}$$

作简谐振动．这些圆频率 $\omega_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$ 称为弦振动的固有圆频率，而相应的驻波解描述固定端点弦的相应的固有振动．由(3.25)式，弦的振动就是由这些固有振动的迭加而得的．象分离变量法所作的那样，将弦的振动表示为驻波的迭加的方法，有时也称为驻波法。

弦所发出的声音，其音调由其振动频率决定，而声音的强度则决定于振动的振幅．弦所能发出的最低音所相应的圆频率就是其最低固有圆频率 $\omega_1=\frac{\pi a}{l}$，这个音称为弦的基音．其余圆频率是 ω_1 的整数倍的音，称为泛音．通常弦所发出声音即由基音及泛音迭加而得，这和分离变量法的求解结果是符合的。

【例 3.1】 求解弦振动方程的混合问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad (0<x<l,\ t>0), & (3.34)\\ t=0:\ u=\cos\frac{\pi}{2l}x,\ u_t=\cos\frac{3\pi}{2l}x+\cos\frac{5\pi}{2l}x, & (3.35)\\ x=0:\ u_x=0, & \\ x=l:\ u=0. & (3.36)\end{cases}$$

解 用分离变量法．先求上述问题的形如(3.15)的解．考虑到边界条件(3.36)，就导致如下常微分方程的特征值问题：

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, & (3.37)\\ X'(0)=X(l)=0. & (3.38)\end{cases}$$

如同第二章§2中那样，不难证明，$\lambda\leqslant 0$ 不是问题(3.37)、(3.38)的特征值．当 $\lambda>0$ 时，方程(3.37)的通解为

$$X=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x. \tag{3.39}$$

由边界条件 $X'(0)=0$ 知 $C_2=0$. 再利用边界条件 $X(l)=0$, 得

$$\cos\sqrt{\lambda}\,l=0. \tag{3.40}$$

于是问题(3.37)、(3.38)的特征值为

$$\lambda_k=\left[\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}{l}\right]^2 \quad (k=1,\ 2,\ \cdots), \tag{3.41}$$

而其相应的特征函数为

$$X_k=\cos\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x \quad (k=1,\ 2,\ \cdots). \tag{3.42}$$

将特征值 $\lambda=\lambda_k$ 代入关于 T 的方程(3.17), 求解可得

$$T_k=A_k\cos\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}t \quad (k=1,\ 2,\ \cdots). \tag{3.43}$$

这样, 将形如(3.15)的解迭加起来就得到

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}t\right)\cos\frac{\left(k-\frac{1}{2}\pi\right)}{l}x. \tag{3.44}$$

现在利用初始条件(3.35)来确定上式中的系数 A_k 及 B_k. 显然, 只要取

$$A_1=1,\ A_k=0 \quad (k=2,\ 3,\ \cdots), \tag{3.45}$$

由(3.44)给出的 $u(x,\ t)$ 就能满足 (3.35) 中的前一条件. 将级数(3.44)对 t 形式求导一次, 就有

$$u_t(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\left(-A_k\sin\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}t+B_k\cos\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}t\right)\cos\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x. \tag{3.46}$$

要使它满足(3.35)中的后一条件，只要取

$$B_1=0,\ B_2=\frac{2l}{3\pi a},\ B_3=\frac{2l}{5\pi a},\ B_k=0,\ (k=4,\ 5,\ \cdots)\quad(3.47)$$

即可．由(3.44)，(3.45)及(3.47)即得

$$\begin{aligned}u(x,\ t)=&\cos\frac{\pi a}{2l}t\cos\frac{\pi}{2l}x\\&+\frac{2l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi a}{2l}t\cos\frac{3\pi x}{2l}\\&+\frac{2l}{5\pi a}\sin\frac{5\pi a}{2l}t\cos\frac{5\pi}{2l}x.\end{aligned}\quad(3.48)$$

不难直接验证，上式的确给出混合问题(3.34)～(3.36)的解．

3.3 非齐次弦振动方程的混合问题

对于非齐次弦振动方程的混合问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,\ t),\\t=0:\ u=0,\ u_t=0,\\x=0\ \ 及\ \ x=l:\ u=0,\end{cases}\quad(3.49)$$

同样可以利用齐次化原理化为齐次弦振动方程的混合问题来求解．

事实上，设 $u=w(x,\ t;\ \tau)$ 是下述齐次弦振动方程的混合问题的解(τ 为参数)：

$$\begin{cases}w_{tt}-a^2w_{xx}=0,\\t=\tau:\ w=0,\ w_t=f(x,\ \tau),\\x=0\ \ 及\ \ x=l:\ w=0,\end{cases}\quad(3.50)$$

则可以和柯西问题的情形一样地证明

$$u(x,\ t)=\int_0^t w(x,\ t;\ \tau)\,d\tau\quad(3.51)$$

就是混合问题(3.49)的解．

混合问题(3.50)可用分离变量法来求解．由前面的结果易知其形式解为

$$w(x,\ t;\ \tau)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k(\tau)\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\sin\frac{k\pi}{l}x,\quad(3.52)$$

其中

$$B_k(\tau)=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l f(\xi,\ \tau)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\,d\xi. \qquad (3.53)$$

将(3.52)代入(3.51)，即得混合问题(3.49)的形式解为

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t B_k(\tau)\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)d\tau\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x. \quad (3.54)$$

当然，要使得由(3.54)式所给出的 $u(x,\ t)$ 确定问题(3.49)的经典解，$f(x,\ t)$ 应满足一定的条件．可以证明，若 $f(x,\ t)\in C^2$，且当 $x=0$ 及 $x=l$ 时 $f(x,\ t)=0$，那么级数(3.54)的确给出混合问题(3.49)的经典解．

习　题

1．两端固定的弦在阻尼介质中的微小横振动满足如下方程：

$$u_{tt}-a^2u_{xx}+\alpha u_t=0$$

其中 $\alpha>0$ 是常数．证明其能量是减少的，并由此证明方程

$$u_{tt}-a^2u_{xx}+\alpha u_t=f(x,\ t)$$

具第一类边界条件的混合问题的解的唯一性．

2．一长为 l 的弦其一端固定，另一端受到与速度成正比的阻尼的作用，此时弦的横振动满足的边界条件为

$$u|_{x=0}=0,\ \alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0,$$

其中 $\alpha>0$．试证明此时弦在作自由微小横振动时能量是减少的，并由此证明弦振动方程

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,\ t)$$

在上述边界条件下的混合问题的解是唯一的．

3．设 v，w 均是弦振动方程

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad (0<x<l,\ t>0)$$

的解，且 v，w 满足如下的边界条件

$$x=0\ \text{及}\ x=l:\ v=w=0,$$

试证明

$$\frac{d}{dt}\int_0^l\frac{1}{2}(v_tw_t+a^2v_xw_x)dx=0 \quad (t>0).$$

4．利用能量积分方法，证明热传导方程具第三类边界条件的混合问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f \quad (t>0,\ 0<x<l), \\ x=0:\ u_x - \sigma_1 u = 0, \\ x=l:\ u_x + \sigma_2 u = 0, \\ t=0:\ u = \varphi(x) \quad (0<x<l) \end{cases}$$

的解的唯一性，其中 σ_1，σ_2 均为正常数。

5．用分离变量法求下列问题的解。

(1) $$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ t=0:\ u = \sin\dfrac{3\pi x}{l},\ u_t = x(l-x) \quad (0<x<l), \\ x=0 \ \text{及}\ x=l:\ u=0. \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ t=0:\ u = x^2 - 2lx,\ u_t = 0 \quad (0<x<l), \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

6．设长为 l 的弹簧其一端固定，另一端在外力作用下作周期振动，此时定解问题归结为

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (0<x<l,\ t>0), \\ t=0:\ u = u_t = 0, \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = A\sin\omega t, \end{cases}$$

试求解此问题。

7．原长为 $2l$ 的杆被作用在两端的压力压缩后，其长度变为 $2l(1-\varepsilon)$。在 $t=0$ 时，把载荷卸去。取杆的中点为坐标原点 $x=0$，试确定杆上点的位移 $u(x,t)$。

8．对由分离变量法求得的混合问题的解 (3.25)，试用系数 A_k 及 B_k（$k=1,2,\cdots$）来表示能量积分

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l (u_t^2 + a^2 u_x^2)\,dx.$$

9．求下述混合问题的解：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \operatorname{sh} x \quad (0<x<l,\ t>0), \\ t=0:\ u = u_t = 0, \\ x=0 \ \text{及}\ x=l:\ u=0. \end{cases}$$

§4 高维波动方程及其定解问题

在前面几节中，我们结合弦振动的物理模型，讨论了一维波动方程——弦振动方程。类似地，我们也可以由弹性薄膜或三维弹

性体的振动导出二维或三维波动方程。此外，从声波或电磁波等波动的传播，也可以导出三维波动方程。这里我们以声音的传播为例来导出三维波动方程。

为了导出声波所满足的方程，首先推导理想流体的动力学方程组。所谓理想流体，是指流体各部分之间的内摩擦（即粘性）和热交换都可忽略不计的情形。设 $\boldsymbol{v}(x, t)=(v_1, v_2, v_3)$ 是时刻 t 在点 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ 处流体的速度向量，$p(x, t)$，$\rho(x, t)$ 分别表示流体的压强与密度，并假设这些函数都是连续可微的。

在流体所占据的空间中，任取一个体积 G，其边界记为 S，在 S 上的单位外法线向量记为 $\boldsymbol{n}=(n_1, n_2, n_3)$。

首先考察在任意时段 $[t_1, t_2]$ 中 G 内流体质量的变化。由质量守恒律，在这段时间中，在体积 G 内流体质量的增加应该等于经过边界 S 从外面流入 G 中的流体质量。易知前者为

$$\iiint_G [\rho(x, t_2)-\rho(x, t_1)]\,dx \equiv \int_{t_1}^{t_2}\iiint_G \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx\,dt; \tag{4.1}$$

而后者应等于

$$-\int_{t_1}^{t_2}\iint_S \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dS\,dt, \tag{4.2}$$

利用格林公式，它又可改写为

$$-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_G \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})\,dx\,dt. \tag{4.3}$$

因此，由质量守恒律，应有

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_G\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})\right]dx\,dt=0. \tag{4.4}$$

由于 G 及 t_1, t_2 的任意性，由此即得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0. \tag{4.5}$$

它是描述质量守恒律的微分方程，通称为*连续性方程*。

类似地考察在任意时段 $[t_1, t_2]$ 中 G 内流体动量的变化。由动量守恒律，在这段时间中，在 G 中流体动量的增加应该等于经

过边界 S 从外面流入 G 中的流体所带来的动量和 G 中流体所受的力在这一时段中的冲量之和. 易知在时段 $[t_1, t_2]$ 中 G 内流体动量的第 $i(i=1, 2, 3)$ 个分量的增加量应为

$$\iiint_G [\rho v_i(x, t_2)-\rho v_i(x, t_1)]dx$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_G \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)dx\,dt; \tag{4.6}$$

在时段 $[t_1, t_2]$ 中经过边界 S 从外面流入 G 中的动量的第 $i(i=1, 2, 3)$ 个分量为(利用格林公式)

$$-\int_{t_1}^{t_2}\iint_S \rho v_i(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,dS\,dt$$

$$=-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_G \operatorname{div}(\rho v_i\boldsymbol{v})dx\,dt; \tag{4.7}$$

而在流体不受外力作用的情况下, 体积 G 中的流体只受到周围流体对它的压力的作用, 此压力的第 $i(i=1, 2, 3)$ 个分量在此时段 $[t_1, t_2]$ 中的冲量为(利用格林公式)

$$-\int_{t_1}^{t_2}\iint_S pn_i dS\,dt$$

$$=-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_G \frac{\partial p}{\partial x_i}dx\,dt. \tag{4.8}$$

因此, 由动量守恒律应有

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_G\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)+\operatorname{div}(\rho v_i\boldsymbol{v})+\frac{\partial p}{\partial x_i}\right]dx\,dt=0,$$

$$(i=1, 2, 3). \tag{4.9}$$

再注意到 G 及 t_1, t_2 的任意性, 由此即得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)+\operatorname{div}(\rho v_i\boldsymbol{v})+\frac{\partial p}{\partial x_i}=0 \quad (i=1, 2, 3). \tag{4.10}$$

它是描述动量守恒律的微分方程. 再利用连续性方程 (4.5), 可将它化为如下的形式:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=0$$
$$(i=1,\ 2,\ 3) \tag{4.11}$$

或

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_k}+\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p=0. \tag{4.12}$$

它通称为欧拉方程.

方程组(4.5)与(4.12)总共4个方程，却有5个未知函数 $\boldsymbol{v}$, ρ 及 p. 在一般的情况下，还应考虑能量方程及状态方程，以构成一个封闭的方程组. 但在流体是均熵的假设下，由于压力 p 与密度 ρ 之间由一个状态方程

$$p=p(\rho) \quad (p'(\rho)>0) \tag{4.13}$$

相联系，这里 $p(\rho)$ 是 ρ 的一个已知函数，完全由气体的性质所决定，我们可由(4.5)、(4.12)及(4.13)得到一个包含4个未知函数及4个方程的封闭方程组，称为流体动力学方程组. 它是一个一阶拟线性方程组. 现在考虑小扰动（例如声音）在流体中的传播. 所谓小扰动指的是一个和已知的静止状态(称为未干扰状态): $\boldsymbol{v}_0=0$, ρ_0, p_0 相差很小的状态 $\boldsymbol{v}$, ρ 及 p. 此时若记

$$\rho=\rho_0+\tilde{\rho},\ p=p_0+\tilde{p}, \tag{4.14}$$

那么 $|\boldsymbol{v}|$ 及 $\tilde{\rho}$, $\tilde{p}$ 均很小. 这样，在流体动力学方程组(4.5)、(4.12)中可以近似地忽略 $|\boldsymbol{v}|$、$\tilde{\rho}$、$\tilde{p}$ 及其偏导数的二阶及二阶以上的项，从而得到

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}+\rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{v}=0, \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} \tilde{p}=0. \tag{4.16}$$

又由(4.13)并注意到 $p_0=p(\rho_0)$，对于小扰动近似地有

$$\tilde{p}=p'(\rho_0)\tilde{\rho}. \tag{4.17}$$

将其代入(4.15)即得

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}+p'(\rho_0)\operatorname{div} \boldsymbol{v}=0. \tag{4.18}$$

从(4.18)与(4.16)中消去未知函数 $\boldsymbol{v}$，就得到压力扰动 $\tilde{p}$ 所满足的微分方程为

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2}-a^2\Delta\tilde{p}=0, \tag{4.19}$$

其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$，$a=\sqrt{p'(\rho_0)}$ 表示声音的传播速度。由 $p=p_0+\tilde{p}$，压力 p 也满足同样的方程。

另外，对(4.16)式关于 t 积分一次，有

$$\boldsymbol{v}(x,\ t)=\boldsymbol{v}(x,\ 0)-\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad}\int_0^t \tilde{p}\,dt. \tag{4.20}$$

因此，若初始速度场 $\boldsymbol{v}(x,\ 0)$ 是有势的，即存在函数 $u^0(x)$ 使

$$\boldsymbol{v}(x,\ 0)=\operatorname{grad} u^0(x), \tag{4.21}$$

那么在此之后的速度场 $\boldsymbol{v}$ 总是有势的，即存在函数 $u(x,\ t)$ 使

$$\boldsymbol{v}(x,\ t)=\operatorname{grad} u(x,\ t). \tag{4.22}$$

事实上，由(4.20)与(4.21)知，此时速度势 u 可取为

$$u=u^0-\frac{1}{\rho_0}\int_0^t \tilde{p}\,dt,$$

从而得到

$$\tilde{p}=-\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{4.23}$$

将(4.22)与(4.23)代入(4.18)式，即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\,\Delta u=0. \tag{4.24}$$

因此，对小扰动来说，其压力 p 与速度势 u 满足同样的微分方程(4.19)或(4.24)，称为*三维波动方程*。显然，由(4.17)，在小扰动的情况，密度 ρ 及 $\tilde{\rho}$ 也满足三维波动方程。

对三维波动方程，类似于一维的情形，可以提以下的定解问题。

若在整个空间 R^3 中考察波动方程(4.24)，就可以提出柯西问题：求方程满足如下初始条件

$$t=0:\ u=\varphi(x),\ u_t=\psi(x) \tag{4.25}$$

的解。

如果限制在一个有界区域 Ω 内考虑问题，那么要确定波动方程的解，除了在 Ω 上要给定初始条件外，还应在 Ω 的边界 Γ 上给出适当的边界条件，这就得到一个混合初-边值问题．边界条件通常有以下三种提法：

第一类边界条件或称狄利克雷条件：

$$u(x,\ t)\big|_{\Gamma}=0; \tag{4.26}$$

第二类边界条件或称诺伊曼条件：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0; \tag{4.27}$$

第三类边界条件：

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\right|_{\Gamma}=0, \tag{4.28}$$

其中 $\sigma>0$ 是已知的常数，而 $\boldsymbol{n}$ 是 Γ 上的单位外法线向量．也可以考虑相应的非齐次边界条件，此时 (4.26)、(4.27) 或(4.28)的右端是 $x,\ t$ 的已知函数．

这里说明一下第二类边界条件 (4.27) 在流体力学中的意义，如果区域 Ω 的边界 Γ 是一个不能渗透的壁面，那么流体只能沿边界 Γ 滑动，而在 Γ 法线方向的速度分量应等于零，即成立

$$v_1\cos(\boldsymbol{n},\ x_1)+v_2\cos(\boldsymbol{n},\ x_2)+v_3\cos(\boldsymbol{n},\ x_3)\big|_{\Gamma}=0.$$

由速度势的定义(4.22)式，上式就给出第二类边界条件(4.27)．

习　题

1．设边界固定的弹性薄膜在未被扰动的状态下是一个平面膜，并设膜上的张力 $\boldsymbol{T}$ 的大小 $T_0=|\boldsymbol{T}|$ 与时间 t 和点的位置无关，试证明薄膜的自由微小横振动的位移 $u(x,\ y,\ t)$满足如下的混合问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=0 & (t>0,\ (x,\ y)\in\Omega),\\ t=0:\ u=\varphi(x,\ y),\ u_t=\psi(x,\ y), & \\ u\big|_{\Gamma}=0, & \end{cases}$$

其中 Γ 是 Ω 的边界，$a^2=\dfrac{T_0}{\rho}$，ρ 是薄膜的面密度．

2．在前题中，若将边界固定的要求分别改为

a) 设薄膜的边界是自由的；

b) 设薄膜的边界固定在弹性支承上.

那么相应的边界条件应该怎样提法?

3. 在第1题中, 设 Ω 的边界 Γ 由两部分 Γ_1 及 Γ_2 组成, 在 Γ_1 上薄膜固定, 在 Γ_2 上薄膜受到一个与其振动速度大小成正比(比例常数为 $\alpha>0$)的阻尼的作用, 列出相应的边界条件.

§5　高维波动方程的柯西问题

在这一节中, 我们将首先讨论二维及三维波动方程的柯西问题:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=0, & (5.1)\\ t=0:\ u=\varphi(x),\ u_t=\psi(x), & (5.2)\end{cases}$$

其中 $x=(x_1, \cdots, x_n)$, $\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, 而 $n=2$ 或 3. 在求得了它的解后, 再利用齐次化原理来求解相应的非齐次波动方程的柯西问题.

5.1　球平均法

先讨论三维波动方程(5.1), 即 $n=3$ 的情况.

对任一函数 $h(x)$, 我们作其在以点 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 为心、r 为半径的球面上的平均值

$$M_h(x, r)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{|y-x|=r} h(y)\,dS_y, \tag{5.3}$$

其中 S_y 表示球面 $|y-x|=r$ 上的面积单元.

记 $y=x+r\alpha$, 其中 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 而 $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1$, 上式可写为

$$M_h(x, r)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\alpha|=1} h(x+r\alpha)\,d\omega, \tag{5.4}$$

其中 $d\omega$ 为单位球面的面积单元.

若 h 是连续函数, 易见

$$M_h(x, 0)=h(x). \tag{5.5}$$

球平均函数 $M_h(x, r)$ 本来只对 $r\geqslant 0$ 有意义, 但(5.4)式的右

端对一切实数 r 都有意义，因此可利用它将 $M_h(x, r)$ 的定义范围延拓到 $r<0$. 易知，在如此延拓后，$M_h(x, r)$ 是 r 的偶函数.

下面我们假设 $h\in C^2$, 由 (5.4) 易见对所有的 x 及 r, 也有 $M_h(x, r)\in C^2$.

引理 5.1 设 $h\in C^2$, 则其球平均函数 $M_h(x, r)$ 作为 x 及 r 的函数满足方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)M_h(x, r)=\Delta_x M_h(x, r) \tag{5.6}$$

$\left(\text{其中 } \Delta_x=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$ 与初始条件

$$r=0: \quad M_h=h(x), \ \frac{\partial}{\partial r}M_h=0. \tag{5.7}$$

证明 将(5.4)式两端关于 r 求导一次，得

$$\frac{\partial}{\partial r}M_h(x, r)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\alpha|=1}\sum_{i=1}^{3}h_{x_i}(x+r\alpha)\alpha_i\,d\omega. \tag{5.8}$$

将上式右端的积分进行改写，并利用格林公式可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}M_h(x, r)&=\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{|z|=r}\sum_{i=1}^{3}h_{x_i}(x+z)\alpha_i\,dS_z\\
&=\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{|z|<r}\Delta_x h(x+z)\,dz\\
&=\frac{1}{4\pi r^2}\Delta_x\left(\iint\limits_{|z|<r}h(x+z)\,dz\right)\\
&=\frac{1}{4\pi r^2}\Delta_x\left(\iiint\limits_{|y-x|<r}h(y)dy\right)\\
&=\frac{1}{4\pi r^2}\Delta_x\left(\int_0^r d\rho\iint\limits_{|y-x|=\rho}h(y)dS_y\right)\\
&=\frac{1}{r^2}\Delta_x\left(\int_0^r\rho^2 M_h(x, \rho)\,d\rho\right)\\
&=\frac{1}{r^2}\int_0^r\rho^2\Delta_x M_h(x, \rho)d\rho.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

将上式两端乘以 r^2 后再关于 r 求导一次，就得到

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}M_h(x, r)\right)=r^2\Delta_x M_h(x, r), \qquad (5.10)$$

由此立即可得方程(5.6).

初始条件(5.7)中的第一式即为(5.5)；再在(5.8)中令 $r=0$，就得到(5.7)中的第二式. 引理证毕.

现设 $u(x, t)$是柯西问题 (5.1)、(5.2) 的解，并对它关于 x 作球平均函数

$$M_u(x, r, t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\alpha|=1} u(x+r\alpha, t)d\omega, \qquad (5.11)$$

我们有

引理 5.2 设 $u(x, t)$是问题(5.1)、(5.2)的解，那么其球平均函数 $M_u(x, r, t)$作为 r 及 t 的函数满足方程

$$\frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)M_u=0 \qquad (5.12)$$

与初始条件

$$t=0:\ M_u=M_\varphi(x, r),\ \frac{\partial M_u}{\partial t}=M_\psi(x, r). \qquad (5.13)$$

证明 由(5.11)与(5.1)有

$$\begin{aligned}a^2\Delta_x M_u&=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\alpha|=1} a^2\Delta_x u(x+r\alpha, t)d\omega\\&=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\alpha|=1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x+r\alpha, t)d\omega\\&=\frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2},\end{aligned} \qquad (5.14)$$

再利用引理 5.1 中的(5.6)式，即得方程(5.12). 由函数 $u(x, t)$ 满足的初始条件(5.2)，立即得到(5.13). 引理证毕.

初值问题(5.12)、(5.13)是容易求解的. 事实上，方程(5.12)可改写为如下一维波动方程的形式：

$$\frac{\partial^2(rM_u)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2(rM_u)}{\partial r^2}=0; \qquad (5.15)$$

再由于(5.13)，其相应的初始条件为

$$t=0:\ rM_u=rM_\varphi(x,\ r),$$
$$\frac{\partial(rM_u)}{\partial t}=rM_\psi(x,\ r). \tag{5.16}$$

由达朗贝尔公式，立即有

$$rM_u(x,\ r,\ t)=\frac{1}{2}[(r+at)M_\varphi(x,\ r+at)+(r-at)M_\varphi(x,\ r-at)]+\frac{1}{2a}\int_{r-at}^{r+at}\xi M_\psi(x,\ \xi)d\xi.$$

由于 $M_\varphi(x,\ \xi)$ 及 $M_\psi(x,\ \xi)$ 是 ξ 的偶函数，由上式可得

$$M_u(x,\ r,\ t)=\frac{1}{2r}[(at+r)M_\varphi(x,\ at+r)-(at-r)M_\varphi(x,\ at-r)]+\frac{1}{2ar}\int_{at-r}^{at+r}\xi M_\psi(x,\ \xi)d\xi. \tag{5.17}$$

在上式中令 $r\to0$，利用平均值定理并注意到球平均函数的性质(5.5)，就得到

$$u(x,\ t)=\frac{\partial}{\partial t}[tM_\varphi(x,\ at)]+tM_\psi(x,\ at)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2t}\iint\limits_{|y-x|=at}\varphi(y)dS_y\right)+\frac{1}{4\pi a^2t}\iint\limits_{|y-x|=at}\psi(y)dS_y. \tag{5.18}$$

这就是柯西问题(5.1)、(5.2)的形式解．这个公式通常也称为泊松公式．

定理 5.1 设 $\varphi\in C^3$，$\psi\in C^2$，那么三维波动方程的柯西问题(5.1)、(5.2)存在唯一的解 $u(x,\ t)$，此解由泊松公式(5.18)给出．

证明 由得到泊松公式(5.18)的过程知，柯西问题(5.1)、(5.2)在 $t\geqslant0$ 的任何 C^2 解一定由(5.18)式给出．这就证明了解的唯一性．

另一方面，在定理的假设下，由(5.18)式给出的 $u(x,\ t)$ 显然属于 C^2．由(5.6)知，对 $r=at$ 有

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(tM_\psi(x, at)) = a\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rM_\psi(x, r))$$
$$= ar\Delta_x M_\psi(x, r) = a^2\Delta_x(tM_\psi(x, at)),$$

即 $tM_\psi(x, at)$ 满足波动方程 (5.1)；同理 $tM_\varphi(x, at)$，因而 $\frac{\partial}{\partial t}(tM_\varphi(x, at))$ 也满足波动方程 (5.1). 再利用(5.7)式就可以证明由泊松公式 (5.18) 所给出的 $u(x, t)$ 还满足初始条件 (5.2)(证明的细节留作习题). 定理证毕.

【例 5.1】 求如下柯西问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = 0 \quad (x\in R^3,\ t>0), \\ t=0:\ u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ u_t = x_1x_2. \end{cases} \tag{5.19}$$

解 先求解下面的问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2\Delta u_1 = 0 \quad (x\in R^3,\ t>0), & (5.20) \\ t=0:\ u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0. & (5.21) \end{cases}$$

因为这个问题的初始资料是球对称函数，而拉普拉斯算子 Δ 又具有球对称的特点，所以其解必是关于 x 的球对称函数，而取如下的形式: $u_1 = u_1(r, t)$，其中 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \geqslant 0$. 此时直接计算可得 $\Delta u_1 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)u_1$，于是，定解问题(5.20)、(5.21)可化为在半无界区域 $\{r\geqslant 0,\ t\geqslant 0\}$ 上的如下定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)u_1 = 0, \\ t=0:\ u_1 = r^2,\ \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

象在引理 5.2 中所作的那样，上述问题可改写为一维波动方程的如下问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2(ru_1)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2(ru_1)}{\partial r^2} = 0, \\ t=0:\ ru_1 = r^3,\ \frac{\partial(ru_1)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

由于在 $r=0$ 时，$ru_1 = 0$，此问题可用 § 2.4 中的反射法来求解，得

$$ru_1=\frac{1}{2}[(r+at)^3+(r-at)^3],$$

于是有

$$u_1(x,\ t)=r^2+3a^2t^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3a^2t^2. \tag{5.22}$$

其次来求解如下的柯西问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u_2}{\partial t^2}-a^2\Delta u_2=0 \quad (x\in R^3,\ t>0), & (5.23)\\ t=0:\ u_2=0,\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}=x_1x_2. & (5.24)\end{cases}$$

由泊松公式(5.18)就有

$$u_2(x,\ t)=\frac{1}{4\pi a^2t}\iint\limits_{|y-x|=at}y_1y_2dS_y. \tag{5.25}$$

上式右端的积分利用球面坐标直接计算可得

$$\iint\limits_{|y-x|=at}y_1y_2dS_y=4\pi(at)^2x_1x_2$$

(如果利用第四章中的结论,因为 y_1y_2 是一个调和函数,由平均值公式可以立刻得到上述结果),从而得到

$$u_2(x,\ t)=x_1x_2t. \tag{5.26}$$

这样,由迭加原理,柯西问题(5.19)的解为

$$u=u_1+u_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3a^2t^2+x_1x_2t. \tag{5.27}$$

5.2 降维法

现在讨论二维波动方程的柯西问题(5.1)、(5.2),其中 $n=2$. 这时前一段所用的球平均法不能直接应用,因为此时(5.6)左端的算子变为 $\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$,相应的方程(5.12)不能化为一维波动方程(5.15). 这时,我们采用阿达马提出的降维法,通过三维柯西问题的解来求解二维柯西问题. 为此,将二维波动方程柯西问题(5.1)、(5.2)的解 $u(x_1,\ x_2,\ t)$ 视为在高一维空间 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$ 中与变量 x_3 无关的函数,它就满足三维波动方程及如下的初始条件:

$$t=0:\ u=\varphi(x_1,\ x_2),\ u_t=\psi(x_1,\ x_2). \tag{5.28}$$

在这种情况下，由泊松公式(5.18)给出的解 u 应与 x_3 无关，因此不妨在其中取 $x_3=0$. 此时，解 $u(x_1, x_2, t)$ 仍由(5.18)式给出，但其右端的积分是在球面

$$|y-x|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+y_3^2}=at \tag{5.29}$$

上的积分(见图 3.6)，而被积函数与 x_3 无关，因此，可将此球面上

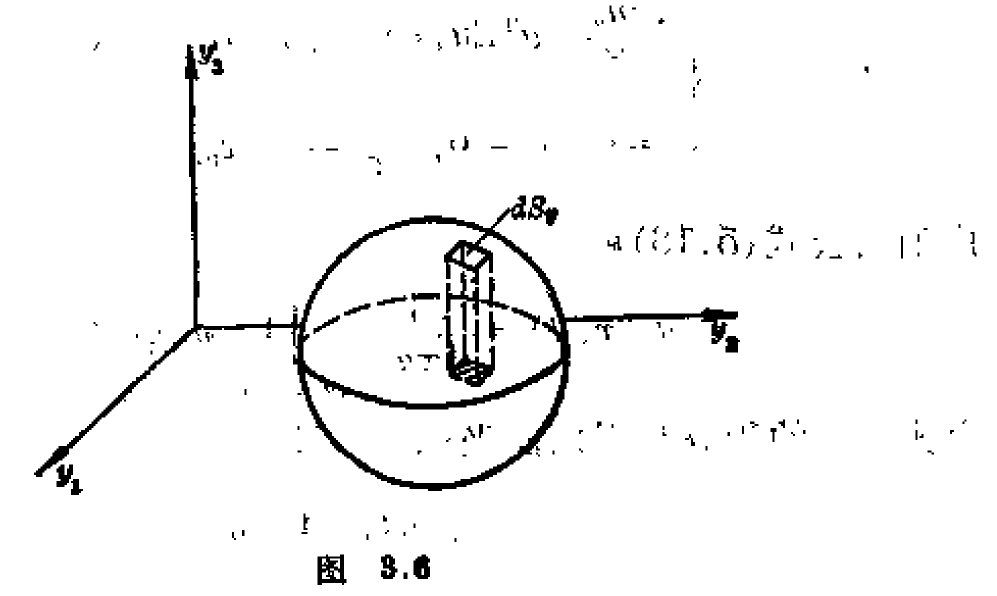


图 3.6

的积分化为这个球面在平面 $x_3=0$ 上的投影(它是以 (x_1, x_2) 为中心，at 为半径的圆域)

$$\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}\leqslant at$$

上的二重积分. 对上半球面 $y_3=\sqrt{(at)^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}$ 来说，其上的面积单元易知为

$$dS_y=\frac{at}{\sqrt{(at)^2-r^2}}\,dy_1dy_2,$$

其中

$$r=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}; \tag{5.30}$$

对下半球面有同样的结果. 于是，由(5.18)式即得二维波动方程柯西问题(5.1)、(5.2)的解为

$$u(x_1, x_2, t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{r\leqslant at}\frac{\varphi(y_1, y_2)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}\,dy_1\,dy_2\right]$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{r\leqslant at}\frac{\psi(y_1, y_2)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}\,dy_1\,dy_2, \tag{5.31}$$

其中 r 由(5.30)式决定. (5.31)也称为泊松公式. 这样我们便得到

定理 5.2 设初始资料 $\varphi\in C^3$, $\psi\in C^2$, 那么二维波动方程的柯西问题(5.1)、(5.2)存在着唯一的解 $u(x, t)$, 且此解由泊松公式(5.31)给出.

5.3 非齐次波动方程的柯西问题

由迭加原理及前面的结果, 对非齐次波动方程的柯西问题只需考虑如下带齐次初始条件的情况:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=f(x, t) \quad (x\in R^3,\ t>0), & (5.32)\\ t=0:\ u=0,\ u_t=0 \quad (x\in R^3). & (5.33)\end{cases}$$

为确定起见, 下面只考虑三维的情形.

利用齐次化原理(不难验证它对高维波动方程的情况也成立), 若 $w(x, t; \tau)$ 是下述问题的解:

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2\Delta w=0 \quad (t>\tau), & (5.34)\\ t=\tau:\ w=0,\ w_t=f(x, \tau), & (5.35)\end{cases}$$

则柯西问题(5.32)、(5.33)的解为

$$u(x, t)=\int_0^t w(x, t; \tau)d\tau. \qquad (5.36)$$

设 $f(x, t)\in C^2$, 由泊松公式(5.18)知, 问题(5.34)、(5.35)的解为

$$w(x, t; \tau)=\frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}\iint\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} f(y, \tau)dS_y, \qquad (5.37)$$

将上式代入(5.36)即得

$$u(x, t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t\frac{d\tau}{t-\tau}\iint\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} f(y, \tau)dS_y.$$

在上述积分中作变换

$$r=a(t-\tau),$$

就得到

$$u(x, t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\iint\limits_{|y-x|=r}\frac{f\left(y, t-\frac{r}{a}\right)}{r}dS_y\,dr$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{r<at}\frac{f\left(y,\ t-\frac{r}{a}\right)dy}{r},\tag{5.38}$$

其中 $r=|y-x|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}$. 这就是柯西问题(5.32)、(5.33)的解的表达式，其右端的积分通常称为推迟势.

习　　题

1. 求解下列波动方程的柯西问题:

(1) $\begin{cases}u_{tt}-a^2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3})=0,\\ t=0:\ \ u=x_1^2+x_2x_3,\ u_t=0.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}u_{tt}-a^2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2})=0,\\ t=0:\ \ u=x_1^2(x_1+x_2),\ \ u_t=0.\end{cases}$

(3) $\begin{cases}u_{tt}-a^2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3})=2(x_2-t),\\ t=0:\ \ u=0,\ u_t=x_1^2+x_2x_3.\end{cases}$

2. 利用降维法由泊松公式导出弦振动方程柯西问题解的达朗贝尔公式.

3. (1) 求定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3})=0\quad (x\in R^3,\ t>0),\\ t=0:\ \ u=\varphi(r),\ u_t=\psi(r)\quad (\text{其中 } r^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2)\end{cases}$$

的解.

(2) 设 $u(x,t)$ 是上述问题的解，求

$$\lim_{x\to 0}u(x,\ t).$$

4. 求解下述柯西问题:

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2})-c^2u=0,\\ t=0:\ \ u=\varphi(x_1,\ x_2),\ u_t=\psi(x_1,\ x_2),\end{cases}$$

其中 c 为一常数.（提示：在三维波动方程中令 $v(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)=e^{\frac{c}{a}x_3}u(x_1,\ x_2,\ t)$.）

5. 对二维非齐次波动方程的柯西问题:

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2})=f(x_1,\ x_2,\ t),\\ t=0:\ \ u=u_t=0\end{cases}$$

导出其解的表达式.

§6 波的传播与衰减

这一节着重讨论波动方程解的依赖区域与影响区域等概念，研究三维与二维的波在传播中的不同特性，相应地介绍惠更斯(Huygens)原理与波的弥散现象．此外，还讨论波随着时间增加而衰减的性质．

6.1 三维波动的传播

先看三维的情况．已知此时柯西问题(5.1)、(5.2)的解可用泊松公式(5.18)表示，即有

$$u(x,\ t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{|y-x|=at}\varphi(y)dS_y\right)+\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{|y-x|=at}\psi(y)dS_y.$$

为了以下讨论的方便，将上式右端第一项进行适当的改写．由于

$$\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{|y-x|=at}\varphi(y)dS_y=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\alpha|=1}t\varphi(x+at\alpha)d\omega,$$

其中 $d\omega$ 为单位球面的面积单元．对 t 求导一次，就得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}&\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{|y-x|=at}\varphi(y)dS_y\right)\\&=\frac{1}{4\pi}\left(\iint\limits_{|\alpha|=1}\varphi(x+at\alpha)\,d\omega+\iint\limits_{|\alpha|=1}at\sum_{i=1}^{3}\varphi_{x_i}(x+at\alpha)\cdot\alpha_i\,d\omega\right)\\&=\frac{1}{4\pi(at)^2}\iint\limits_{|y-x|=at}\left[\varphi(y)+\sum_{i=1}^{3}\varphi_{y_i}(y)(y_i-x_i)\right]dS_y.\end{aligned}$$

将它代入泊松公式，就可将三维波动方程柯西问题(5.1)、(5.2)的解表示为

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi(at)^2}\iint\limits_{|y-x|=at}\Big[t\psi(y)+\varphi(y)$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\varphi_{y_i}(y)(y_i-x_i)\Big]dS_y. \tag{6.1}$$

由(6.1)式不难看出，解 u 在点 $(x_0, t_0)(t_0>0)$ 处的值只依赖于初始资料 φ, ψ 以及 φ 的一阶偏导数在以 x_0 为球心，以 at_0 为半径的球面 $S_{at_0}^{x_0}$: $|x-x_0|=at_0$ 上的值(参见图3.7). 因此，点 (x_0, t_0) 的依赖区域就是 x 空间中的球面 $S_{at_0}^{x_0}$. 容易看到，$S_{at_0}^{x_0}$ 是以 (x_0, t_0) 为顶点向下作半顶角为 $\theta=\mathrm{tg}^{-1}a$ 的圆锥面

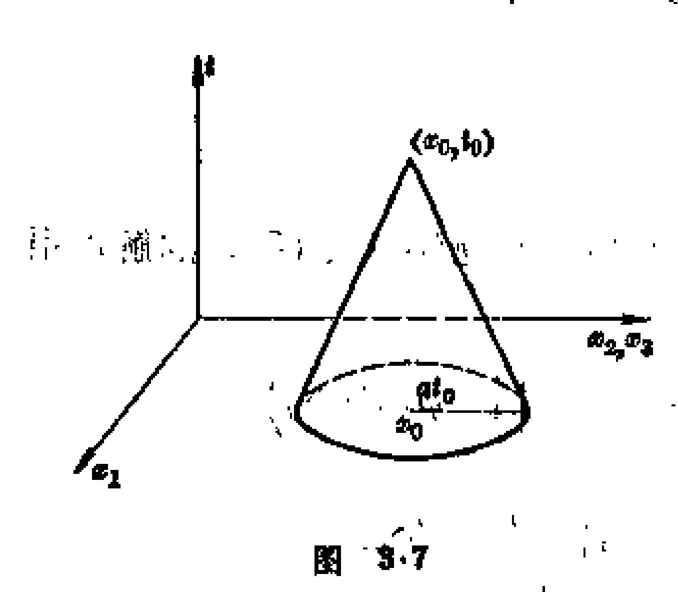


图 3.7

$$(x-x_0)^2=a^2(t-t_0)^2 \quad (t\leqslant t_0) \tag{6.2}$$

和超平面 $t=0$ 的交截. 这个圆锥面在波动方程的研究中起着特别重要的作用，称为波动方程的特征锥面. 特征锥面连同其内部称为特征锥，其方程为

$$(x-x_0)^2\leqslant a^2(t-t_0)^2 \quad (t\leqslant t_0). \tag{6.3}$$

对特征锥(6.3)中的任一点，其依赖区域都落在以 x_0 为心，以 at_0 为半径的球 $B_{at_0}^{x_0}$: $|x-x_0|\leqslant at_0$ 之中. 因此，给定在 x 空间中的球 $B_{at_0}^{x_0}$ 上的初始资料 φ 及 ψ，就可以完全决定柯西问题(5.1)、(5.2)在特征锥(6.3)中的解. 这说明，特征锥(6.3)是球 $B_{at_0}^{x_0}$ 的决定区域.

另一方面，设 $(x_0, 0)$ 是初始超平面 $t=0$ 上的一点，如果初始资料及其一阶偏导数在此点有一个扰动，那么解 u 在 (x, t) 空间中那些依赖区域包含 $(x_0, 0)$ 的所有点上的值都要受到影响，这就是点 $(x_0, 0)$ 的影响区域. 显然，点 $(x_0, 0)$ 的影响区域应是以该点为顶点，半顶角为 $\theta=\mathrm{tg}^{-1}a$ 的向上的圆锥面(参见图3.8)

$$(x-x_0)^2=a^2t^2 \quad (t\geqslant 0), \tag{6.4}$$

即向上的特征锥面.

这样,假设 $t=0$ 时在点 x_0 处有一扰动,那么在时刻 $t(>0)$ 这个扰动的影响面就是以 x_0 为心、at 为半径的球面:

$$S_{at}^{x_0}:\quad |x-x_0|=at. \tag{6.5}$$

因此,对空间一点 x,设其与 x_0 的距离为 r: $|x-x_0|=r$,那么只有在 $t=\frac{r}{a}$ 时,点 x 处才受到这个扰动的影响. 事实上,在 $t<\frac{r}{a}$ 时,扰动尚未传到 x 处;而在 $t>\frac{r}{a}$ 时,扰动在 x 处的影响已经消失.

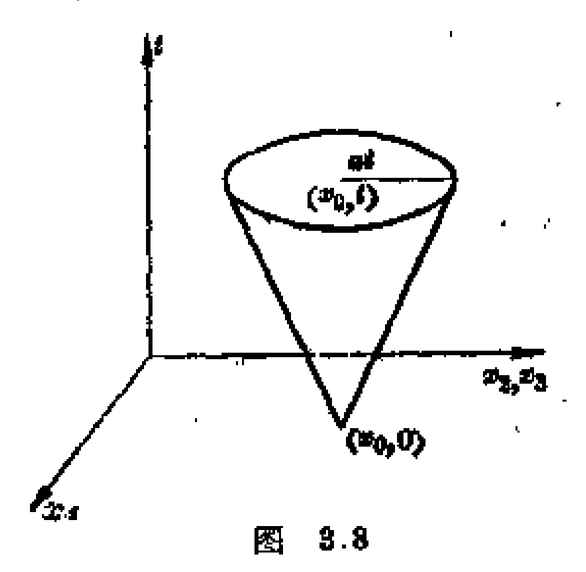


图 3.8

这说明扰动以速度 a 向四周传播,而且在扰动过后不留下任何影响(无后效性).

如果初始扰动不是集中在一点,而是发生在某一个有界区域 K 内,情况也是类似的. 对 K 外的任一点 x,设它与 K 中点的距离的最小及最大值分别为 d 及 D,那末在时刻 $t_0=\frac{d}{a}$,扰动开始达到 x 点处;而过了时刻 $t_1=\frac{D}{a}$,扰动对 x 点就不再发生影响. 这就是说,在时刻 t_0 扰动波的前缘到达 x 点;而在时刻 t_1,扰动波的后缘经过 x 点. 在任一时刻 t,扰动波的前缘是所有以 K 中的点为心、at 为半径的球面的外包络面. 这个外包络面通常称为传播波的*前阵面*. 当 t 充分大时,这些球面还有一个内包络面,称为*后阵面*. 在前阵面与后阵面之间的区域就是受到扰动影响的区域. 前阵面以外的部分是尚未受到扰动影响的区域;后阵面以内的部分则是扰动的影响已过,又恢复了原来状态的区域. 因此当初始扰动限制在空间某一局部范围内时,三维波的传播有清晰的前阵面与后阵面,这个现象称为*惠更斯原理*. 声波的传播就具有这样的特性. 这说明了为什么在现实(三维)的世界里,我们能发送并且

也能接收到清晰的声音信号.

6.2 二维波动的传播

现在考察二维即 $n=2$ 的情况. 此时,由二维波动方程柯西问题解的泊松公式(5.31)可见,空间一点 (x_0, t_0) $(t_0>0)$ 的依赖区域应是初始平面 $t=0$ 上以 x_0 为心、at_0 为半径的圆域 $\Sigma_{at_0}^{x_0}$: $|x-x_0|\leqslant at_0$, 而不是其圆周. 它是以 (x_0, t_0) 为顶点向下作半顶角为 $\theta=\operatorname{tg}^{-1}a$ 的特征锥(而不是特征锥面!)

$$(x-x_0)^2\leqslant a^2(t-t_0)^2 \quad (t\leqslant t_0) \tag{6.6}$$

与超平面 $t=0$ 的交截. 这是二维与三维情况的重要区别. 同样对于初始平面上的一点 $(x_0, 0)$, 其影响区域应是过 $(x_0, 0)$ 的特征锥

$$(x-x_0)^2\leqslant a^2t^2 \quad (t\geqslant 0), \tag{6.7}$$

而不象三维情况那样是一个特征锥面.

这样,在二维波的情况,假设 $t=0$ 时在 x_0 点有一扰动,那么在时刻 $t(>0)$, 这个扰动的影响范围应是以 x_0 为心、at 为半径的圆域(而不是圆周!)

$$\Sigma_{at}^{x_0}:\ |x-x_0|\leqslant at. \tag{6.8}$$

因此,对平面上与 x_0 距离为 r 的一点 x, 在时刻 $t=\frac{r}{a}$ 开始受到扰动的影响后,扰动对该点的影响不会消失. 这就是说,扰动虽然以速度 a 向四周传播,但扰动的影响将一直持续下去.

假设初始扰动集中在一个有界区域 K 内,那么其扰动传播的前阵面应是所有以 K 中的点为中心、at 为半径的圆域的外包络面. 因此,此时仍有清晰的前阵面,但不再有后阵面,惠更斯原理不再成立. 这个现象称为**波的弥散**. 这是二维波动与三维波动的一个本质的区别. 水波可以近似地作为平面上二维波的例子.

根据降维法, 如果把二维情形的初始扰动看作是在一个三维空间中的无限长柱体(它是无界区域!)内发生,但不依赖于第三个空间变量 x_3 的扰动, 就可以想见对二维波动产生波的弥散这种有

后效现象的原因了.

我们这里所讨论的波的传播现象并不仅限于二维与三维空间中的波动方程. 可以证明, 在空间维数 n 是奇数时 (除 $n=1$ 外), 对波动方程总成立惠更斯原理; 而当空间维数 n 是偶数时, 总有波的弥散现象发生, 惠更斯原理不成立.

6.3 波动方程解的衰减

现在研究当 $t\to+\infty$ 时, 波动方程柯西问题解的渐近性态. 这里我们只讨论 $n=3$ 的情况.

假设初始资料 φ 及 ψ 满足泊松公式所要求的光滑性条件, 并在一有界区域外恒等于零 (称为具有紧支集), 即设初始扰动局限在一个有界区域内. 此时, 必存在一个常数 $\rho>0$, 使 φ 及 ψ 在以原点为中心、ρ 为半径的球 B_ρ^0 外恒为零, 而在球 B_ρ^0 内成立

$$|\psi|,\ |\varphi|,\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|\leqslant C_1\quad(i=1,\ 2,\ 3),\tag{6.9}$$

其中 C_1 为一正常数.

此时, 柯西问题的解 $u(x,\ t)$ 由(6.1)式给出. 由此, 在时刻 t, 解在 x 处的值由 φ, ψ 及 φ 的一阶偏导数在以 x 为中心、at 为半径的球面 S_{at}^x: $|y-x|=at$ 上的积分确定. 但由于 φ, ψ 及 φ 的一阶偏导数仅在 B_ρ^0 内不为零, 上述积分仅需在 $S_{at}^x\cap B_\rho^0$ 上考虑.

利用(6.9)式, 并注意到对任何 $y\in S_{at}^x$ 成立

$$|y_i-x_i|\leqslant at\quad(i=1,\ 2,\ 3),\tag{6.10}$$

对(6.1)积分中的被积函数可得如下估计:

$$\Big|t\psi(y)+\varphi(y)+\sum_{i=1}^{3}\varphi_{y_i}(y)(y_i-x_i)\Big|\leqslant C_2t+C_3\quad\forall y\in S_{at}^x,$$

从而当 $t\geqslant1$ 时成立

$$\Big|t\psi(y)+\varphi(y)+\sum_{i=1}^{3}\varphi_{y_i}(y)(y_i-x_i)\Big|\leqslant C_4t\quad\forall y\in S_{at}^x,\tag{6.11}$$

其中 C_2, C_3 及 C_4 为某些正常数. 此外, 易知球面 S_{at}^x 与球 B_ρ^0 的交集的面积不超过 B_ρ^0 的表面积, 即

$$(S_{at}^x\cap B_\rho^0)\text{的面积}\leqslant4\pi\rho^2.\tag{6.12}$$

于是，由(6.1)、(6.11)及(6.12)即得如下估计：

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{4\pi(at)^2} \iint\limits_{S_{at}^x \cap B_\rho^3} \left| t\psi(y) + \varphi(y) + \sum_{i=1}^{3} \varphi_{y_i}(y)(y_i - x_i) \right| dS_y$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi(at)^2} C_4 t \cdot 4\pi\rho^2 = Ct^{-1}$$

$$\forall x \in R^3, \ t \geqslant 1, \tag{6.13}$$

其中 C 为一正常数。

由解的衰减估计(6.13)式可见，如果初始资料具有紧支集，那末当 $t \to +\infty$ 时，柯西问题的解 $u(x,t)$ 关于 $x \in R^3$ 一致地趋向于零，其趋向零的阶数为 t^{-1}。

习　题

1. 试说明：对一维波动方程，惠更斯原理不成立。

2. 对一维波动方程，若初始资料具有紧支集，那末当 $t \to +\infty$ 时其柯西问题的解是否一定一致趋向于零？

3. 设 u 为初始资料 φ 及 ψ 具有紧支集的二维波动方程的解。试证明：对任意固定的 $x_0 \in R^2$，成立

$$\lim_{t \to +\infty} u(x_0, t) = 0.$$

§7　能量积分

在这一节中我们要进一步介绍证明双曲型方程解的唯一性及稳定性的一个十分有效的方法——能量积分方法。在§3，我们曾经用能量积分方法证明了弦振动方程混合问题解的唯一性。这一节我们要将这个方法用于高维波动方程的混合问题。鉴于这个方法的重要性，虽然在§5中已经对高维波动方程得到了柯西问题解的唯一性，这里再用能量积分方法给出一个新的证明。顺便指出，能量积分方法不仅可用于双曲型方程，而且对一大类方程均有效；同时，这种方法对证明定解问题解的存在性也是很重要的。

7.1 波动方程的混合问题

以三维波动方程为例. 设 Ω 为 R^3 中有界区域, 在柱形区域 $Q=\bar{\Omega}\times[0,T]$ 上考察混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=0, & (7.1)\\ t=0:\ u=\varphi(x),\ u_t=\psi(x), & (7.2)\\ u|_\Gamma=0, & (7.3)\end{cases}$$

其中 Γ 表示区域 Ω 的边界.

以 u_t 乘方程(7.1)的两端, 并在 Ω 上积分得

$$\iiint_\Omega u_t(u_{tt}-a^2\Delta u)dx=0. \tag{7.4}$$

利用格林公式, 并注意到由边界条件(7.3)有 $u_t|_\Gamma=0$, 可得

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega u_t u_{x_ix_i}dx&=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(u_tu_{x_i})-u_{tx_i}u_{x_i}\right]dx\\&=\iint_\Gamma u_tu_{x_i}\cos(\boldsymbol{n},x_i)\,dS-\iiint_\Omega u_{tx_i}\cdot u_{x_i}dx\\&=-\iiint_\Omega u_{tx_i}u_{x_i}dx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iiint_\Omega u_{x_i}^2dx\end{aligned}$$

$$(i=1,2,3),$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 表示 Γ 的单位外法线向量. 又显然有

$$\iiint_\Omega u_tu_{tt}\,dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iiint_\Omega u_t^2dx.$$

这样, 易知(7.4)式可改写为

$$\frac{d}{dt}E(t)=0, \tag{7.5}$$

其中

$$E(t)=\frac{1}{2}\iiint_\Omega\left(u_t^2+a^2\sum_{i=1}^3u_{x_i}^2\right)dx \tag{7.6}$$

称为能量积分. 于是,

$$E(t)=\text{常数}.$$

这样我们就得到了

定理 7.1　设 $u(x,t)$ 是齐次波动方程的混合问题 (7.1)～(7.3) 的解，那末能量积分 $E(t)$ 保持不变，即成立

$$E(t)=E(0), \tag{7.7}$$

其中
$$E(0)=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}\left(\psi^2+a^2\sum_{i=1}^{3}\varphi_{x_i}^2\right)dx.$$

在实际问题中，能量积分 $E(t)$ 通常表示系统的总能量．因此定理 7.1 在物理上反映了波在传播（包括在边界上的反射）过程中的能量守恒律．

与弦振动方程的情形相类似，由定理 7.1 立即得到下面的唯一性理．

定理 7.2　三维波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=f(x,t), \\ t=0:\ u=\varphi(x),\ u_t=\psi(x), \\ u|_{\Gamma}=g(x,t) \end{cases} \tag{7.8}$$

的解是唯一的．

下面我们利用能量积分方法来讨论混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=f(x,t), \\ t=0:\ u=\varphi(x),\ u_t=\psi(x), \\ u|_{\Gamma}=0 \end{cases} \tag{7.9}$$

的解关于初始条件与方程右端的连续依赖性．

此时，和前面的推导类似地可得

$$\frac{dE(t)}{dt}=\iiint\limits_{\Omega}u_t f\,dx,$$

其中 $E(t)$ 仍由 (7.6) 式给出．由此利用不等式 $ab\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)$，就有

$$\frac{dE(t)}{dt}\leqslant\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}u_t^2\,dx+\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}f^2\,dx$$
$$\leqslant E(t)+\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}f^2\,dx.$$

这是一个关于 $E(t)$ 的微分不等式. 以 e^{-t} 乘上式两端, 可得

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t}E(t)\right)\leqslant\frac{1}{2}e^{-t}\iiint_{\Omega}f^2\,dx.$$

再将上式从 0 到 t 积分, 得

$$E(t)\leqslant e^t\Big[E(0)+\frac{1}{2}\int_0^t e^{t-\tau}\iiint_{\Omega}f^2dx\,d\tau.$$

于是对 $0\leqslant t\leqslant T$ 就有

$$E(t)\leqslant C_1\Big(E(0)+\iiiint_{Q}f^2\,dx\,dt\Big),\tag{7.10}$$

其中 C_1 是一个仅与 T 有关的常数. 这就给出了对 u 的一阶偏导数的估计.

下面利用上述对 u 的一阶偏导数的估计来给出对 u 本身的估计. 为此首先证明如下的

引理 7.1 设 $u=u(x)$ 是在有界区域 $\Omega\subset R^n$ 上的连续可微函数, 且在边界 Γ 上为零, 则成立如下的弗里德里克斯(Friedrichs)不等式:

$$\int_{\Omega}u^2\,dx\leqslant C\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx,\tag{7.11}$$

其中 C 是一个与 u 无关但与 Ω 有关的正常数.

证明 不妨就 $n=2$ 的情形证明此不等式, 并不妨假设 Ω 在第一象限内. 由 Ω 的有界性, 作矩形区域

$$\Omega_1=\{0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b\}\supset\Omega,$$

并在 Ω_1/Ω 上定义 $u\equiv0$, 将 u 的定义域拓广到 Ω_1.

设 $(x_1, y_1)\in\Omega_1$, 则有

$$\int_0^{x_1}\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\,dx=u(x_1, y_1),$$

于是由施瓦兹(Schwarz)不等式, 得

$$\begin{aligned}u^2(x_1, y_1)&\leqslant x_1\int_0^{x_1}\left(\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right)^2dx\\&\leqslant a\int_0^a\left(\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right)^2dx.\end{aligned}$$

将上式两边在矩形区域 Ω_1 上对 (x_1, y_1) 积分, 得

$$\int_{\Omega_1} u^2(x_1, y_1)\,dx_1\,dy_1 \leqslant a^2 \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\,dy$$

$$\leqslant a^2 \int_{\Omega_1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx dy.$$

由于在 Ω 外 $u\equiv 0$, 所以取 $C=a^2$, 就有

$$\int_{\Omega} u^2 dx\,dy \leqslant C\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy,$$

这就是(7.11)式. 引理证毕.

记

$$\|u(t)\|^2 = \iiint_{\Omega} u^2(x, t)\,dx, \tag{7.12}$$

利用弗里德里克斯不等式(7.11), 由 (7.10)式就可得到对 $0\leqslant t\leqslant T$ 成立

$$\|u(t)\|^2 \leqslant C_2\Big(E(0) + \iiiint_Q f^2\,dx\,dt\Big), \tag{7.13}$$

其中 C_2 为仅与 Ω 及 T 有关的正常数.

综合(7.10)与(7.13)式, 即得如下估计

$$\|u(t)\|^2 + \|u_t(t)\|^2 + \sum_{i=1}^{3} \|u_{x_i}(t)\|^2$$

$$\leqslant C\Big(\|\psi\|^2 + \sum_{i=1}^{3} \|\varphi_{x_i}\|^2 + \iiiint_Q f^2 dx\,dt\Big), \tag{7.14}$$

其中 C 是一个正常数. 这是一个关于混合问题 (7.9) 的解及其一阶偏导数的积分估计式, 通称为能量不等式或能量估计式. 这种估计式是在假设解存在的前提下得到的, 具有这种特点的估计式, 统称为先验估计式.

如果我们记

$$\|u(t)\|_1^2 = \|u(t)\|^2 + \sum_{i=1}^{3}\|u_{x_i}(t)\|^2, \tag{7.15}$$

$$\|f\|_{L^2(Q)}^2 = \iiiint_Q f^2\,dx\,dt, \tag{7.16}$$

那么能量不等式(7.14)可写为如下简洁的形式:

$$\|u(t)\|_1^2 + \|u_t(t)\|^2 \leqslant C\big(\|\varphi\|_1^2 + \|\psi\|^2 + \|f\|_{L^2(Q)}^2\big). \tag{7.17}$$

由这个能量估计式立即得到

定理 7.3 混合问题(7.9)的解 $u(x, t)$ 在下述意义下连续依赖于初值(φ, ψ)与方程右端 f：对任何给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，若

$$\|\varphi_1-\varphi_2\|_1<\delta, \ \|\psi_1-\psi_2\|<\delta, \ \|f_1-f_2\|_{L^2(Q)}<\delta,$$

则以(φ_1, ψ_1)为初值、f_1 为方程右端的解 u_1 与以(φ_2, ψ_2)为初值、f_2 为方程右端的解 u_2 之差在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上满足

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_1<\varepsilon,$$

$$\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}(t)-\frac{\partial u_2}{\partial t}(t)\right\|<\varepsilon.$$

注 7.1 上面对三维波动方程的讨论，对一般的 n 维波动方程同样是适用的. 这里只给出了波动方程的混合问题解的唯一性以及解关于初值和方程右端的连续依赖性. 至于解的存在性，例如说我们仍可象一维的情况那样，运用分离变量法予以证明. 但是此时，代替考察常微分方程的特征值问题，需要考察调和方程的特征值问题，这里就不深入讨论了.

7.2 用能量积分方法证明柯西问题解的唯一性

现在利用能量积分方法来证明三维波动方程柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=0 \quad (t>0,\ x\in R^3), & (7.18)\\ t=0:\ u=\varphi(x),\ u_t=\psi(x) & (7.19)\end{cases}$$

的解的唯一性.

此时，如果完全按照前一段中的方法进行，就需要在 x 全空间计算能量积分

$$\frac{1}{2}\iiint\limits_{R^3}\left(u_t^2+a^2\sum_{i=1}^{3}u_{x_i}^2\right)dx,$$

但在一般情况下，这个积分可能是发散的. 为避免这一困难，对(x, t)空间的任一点$(y, T)$$(T>0)$，考察过该点的特征锥面与初始平面 $t=0$ 所围成的锥形区域(见图 3.9)

$$\Gamma(T):\ |x-y|\leqslant a(T-t) \quad (0\leqslant t\leqslant T).$$

对任一时刻 $\tau(0\leqslant\tau\leqslant T)$，以 Ω_τ 记超平面 $t=\tau$ 与锥形域 $\Gamma(T)$ 相

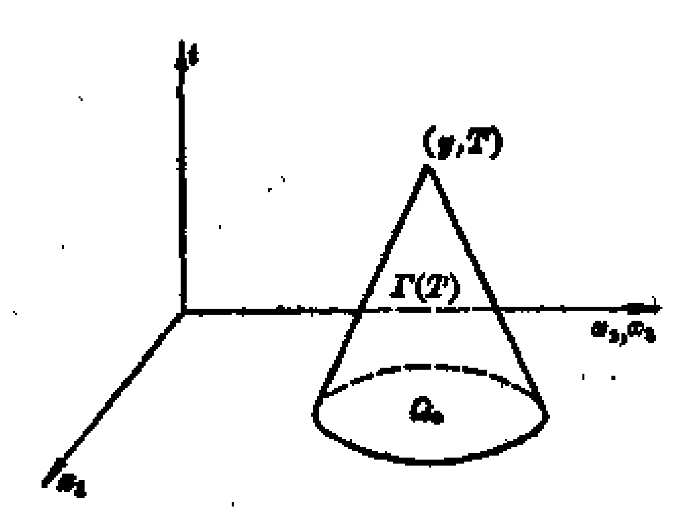


图 3.9

截而得的截面

$$\Omega_\tau:\ |x-y|\leqslant a(T-t),\ t=\tau. \tag{7.20}$$

我们要证明：在区域 Ω_τ 中的总能量 $E(\Omega_\tau)$ 不会超过在 Ω_0 中的总能量 $E(\Omega_0)$. 即若记

$$E(\Omega_\tau)=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega_\tau}\left(u_t^2+a^2\sum_{i=1}^{3}u_{x_i}^2\right)dx, \tag{7.21}$$

我们要证明

$$\frac{dE(\Omega_\tau)}{d\tau}\leqslant 0. \tag{7.22}$$

类似于前一段中的推导，对 $0\leqslant\tau\leqslant T$ 成立

$$\begin{aligned}0&=\iiint\limits_{\Omega_\tau}u_t(u_{tt}-a^2\Delta u)dx\\&=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega_\tau}\frac{\partial}{\partial t}\left(u_t^2+a^2\sum_{i=1}^{3}u_{x_i}^2\right)dx\\&\quad-a^2\iiint\limits_{\partial\Omega_\tau}u_t\sum_{i=1}^{3}u_{x_i}\cos(\boldsymbol{n},x_i)dS,\end{aligned} \tag{7.23}$$

其中 $\partial\Omega_\tau$ 表示 Ω_τ 的边界，$\boldsymbol{n}$ 为其上的单位外法线向量. 但是

$$E(\Omega_\tau)=\frac{1}{2}\int_0^{a(T-\tau)}\iint\limits_{|x-y|=\rho}\left(u_t^2+a^2\sum_{i=1}^{3}u_{x_i}^2\right)dS\,d\rho, \tag{7.24}$$

其中 dS 为球面 $|x-y|=\rho$ 上的面积单元. 由此易知有

$$\frac{dE(\Omega_\tau)}{d\tau}=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega_\tau}\frac{\partial}{\partial t}\left(u_t^2+a^2\sum_{i=1}^{3}u_{x_i}^2\right)dx$$

$$-\frac{a}{2}\iint_{\partial\Omega_\tau}\left(u_t^2+a^2\sum_{i=1}^3 u_{x_i}^2\right)dS. \qquad (7.25)$$

利用(7.23)式可将上式改写为

$$\frac{dE(\Omega_\tau)}{d\tau}=-\frac{a}{2}\iint_{\partial\Omega_\tau}\left[\left(u_t^2+a^2\sum_{i=1}^3 u_{x_i}^2-2au_t\sum_{i=1}^3 u_{x_i}\cos(n,x_i)\right)\right]dS$$

$$=-\frac{a}{2}\iint_{\partial\Omega_\tau}\sum_{i=1}^3\left[u_t\cos(n,x_i)-au_{x_i}\right]^2 dS\leqslant 0,$$

这就是(7.22)式. 这样我们便得到了

定理7.4 设 $u(x,t)$ 是齐次波动方程的柯西问题(7.18)、(7.19)的解,则成立如下的能量不等式:

$$\frac{1}{2}\iiint_{\Omega_t}\left(u_t^2+a^2\sum_{i=1}^3 u_{x_i}^2\right)dx\leqslant\frac{1}{2}\iiint_{\Omega_0}\left(\psi^2+a^2\sum_{i=1}^3\varphi_{x_i}^2\right)dx$$

$$(0\leqslant t\leqslant T), \qquad (7.26)$$

其中 Ω_t 由(7.20)式定义.

由于 (y,T) 的任意性, 从定理7.4立即可以得到柯西问题(7.18)、(7.19)的解的唯一性.

我们还可以象对混合问题所作的那样, 利用能量不等式来研究柯西问题的解关于初值与方程右端的连续依赖性.

习　题

1. 在混合问题(7.1)～(7.3)中, 若将边界条件(7.3)改为如下的诺伊曼边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=0,$$

证明定理7.1及定理7.2仍然成立.

2. 设 u 是带一阶耗散项的波动方程的如下混合问题的解:

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\Delta u+\alpha u_t=0 & (t>0,\ x\in\Omega),\\ t=0:\ u=\varphi(x),\ u_t=\psi(x),\\ u|_\Gamma=0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0$ 是常数, 而 $\Omega\in R^3$ 是有界区域, Γ 为其边界. 试证明其总能量

$$E(t)=\frac{1}{2}\iiint_\Omega\left(u_t^2+a^2\sum_{i=1}^3 u_{x_i}^2\right)dx$$

随时间的增加而减少. 由此证明上述定解问题解的唯一性.

3. 设有界区域 $\Omega\subset R^3$ 的边界 Γ 由两部分 Γ_0 及 Γ_1 组成（Γ_1 非空），考虑在 Γ_1 上给定耗散边界条件的如下混合问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=0 \quad (t>0,\ x\in\Omega), \\ t=0:\ u=\varphi(x),\ u_t=\psi(x), \\ u|_{\Gamma_0}=0,\ \left(\alpha\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\Gamma_1}=0, \end{cases}$$

其中 $\alpha>0$ 是常数，n 表示 Γ_1 上的单位外法线向量．设 u 是上述定解问题的解，试证明其总能量 $E(t)$ 随时间的增加而减少，这里 $E(t)$ 的定义同题 2．由此证明这个定解问题解的唯一性．

4. 考虑波动方程的第三类混合初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=0 \quad (t>0,\ x\in\Omega), \\ t=0:\ u=\varphi(x),\ u_t=\psi(x), \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\right)\Big|_{\Gamma}=0, \end{cases}$$

其中 $\alpha>0$ 是常数，n 为 Γ 上的单位外法线向量．

设 u 为上述定解问题的解，定义能量积分

$$E(t)=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}\left(u_t^2+a^2\sum_{i=1}^{3}u_{x_i}^2\right)dx+\frac{a^2}{2}\iint\limits_{\Gamma}\alpha u^2\,dS,$$

试证明

$$E(t)\equiv\text{常数}.$$

由此证明上述定解问题解的唯一性．

5. 在具有障碍物的空间考虑声波的传播可归结为如下波动方程在外部区域中的混合问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=0 \quad (t>0,\ x\in R^3\backslash K), \\ t=0:\ u=\varphi(x),\ u_t=\psi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial K}=0, \end{cases}$$

其中 K 是 R^3 中具有光滑边界 ∂K 的有界区域，n 是 ∂K 的单位外法线向量．对 (x,t) 空间中的任一点 (y,T) $(y>0)$，如本节第 2 段中那样，作过该点的特征锥与 $t=0$ 所围成的锥形域 $\Gamma(T)$ 的截面 Ω_τ，并记

$$\widetilde{\Omega}_\tau=\Omega_\tau\cap(R^3\backslash K).$$

设 u 为此定解问题的解，定义能量积分为

$$E(t)=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\widetilde{\Omega}_t}\left(u_t^2+a^2\sum_{i=1}^{3}u_{x_i}^2\right)dx,$$

试证明 $E(t)$ 随时间增加而减少．

6. 利用第 5 题的结果，证明所考虑的波动方程的外混合问题解的唯一性．

第四章

调和方程

本章介绍最典型的椭圆型方程——调和方程(又称拉普拉斯方程)和泊松方程的基本定解问题及解的性质. 在§1中介绍调和方程及其定解问题,§2中应用格林公式导出调和方程解的平均值定理,并由此证明调和函数的极值原理,再应用极值原理讨论狄利克雷问题解的唯一性和稳定性. §3中给出格林函数的定义,并且对特殊区域利用格林函数导出了狄利克雷问题解的表达式. §4介绍调和函数的一些重要性质. 在最后一节中,进一步讨论泊松方程的求解问题.

§1 调和方程及其定解问题

本章所要讨论的调和方程和泊松方程与前二章中的热传导方程及波动方程不同,描述的是属于平衡或稳定的自然现象. 以稳定温度分布为例. 在第二章中已得到了温度分布函数应满足的热传导方程

$$u_t-a^2\Delta u=f\quad\left(\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right).$$

如果热源函数 $f=f(x)\,(x=(x_1,\ x_2,\ x_3))$ 与 t 无关,又假设边界条件也不随时间 t 而变化(例如假设边界为绝热),那末在相当长的时间后,物体的温度就趋向稳定的状态,即可设各点的温度近似地与时间 t 无关: $u=u(x)$. 此时,上面的方程就化为

$$\Delta u=f_1(x),\tag{1.1}$$

其中 $f_1=-\dfrac{f}{a^2}$. 这就是带有稳定热源时的稳定温度场所满足的方程. 这种类型的偏微分方程称为泊松方程. 在 $f_1\equiv0$ 时相应的

齐次方程

$$\Delta u=0, \tag{1.2}$$

则称为调和方程或拉普拉斯方程。

在上述方程中，自变量可一般地取为 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，于是 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$，此时方程(1.2)及(1.1)可分别称为 n 维调和方程及 n 维泊松方程。在实际问题中常见的是 n 等于 2 或 3 的情形。

n 维调和方程(1.2) 的二阶连续可微的解称为 n 维调和函数。

下面再讨论几个导至调和方程 (1.2) 或泊松方程 (1.1) 的实例。

【例 1.1】 弹性膜的平衡。

在考虑均匀弹性膜的平衡状态时，若以 $u=u(x)$ $(x=(x_1, x_2))$表示膜在垂直方向上的位移，而 $f=f(x)$ 比例于沿垂直方向作用在膜上的外力密度，从力的平衡条件出发，可以证明 u 应满足二维泊松公式(1.1)。特别，在无外力作用的情形，就得到二维调和方程(1.2)。

【例 1.2】 流体的无旋流动。

考虑空间中一不可压缩流体的稳定无旋流动。记流体的密度为 ρ_0（常数），速度分布为 $\boldsymbol{v}(x)=(v_1(x), v_2(x), v_3(x))$，而质量源的密度为 $f(x)$，其中 $x=(x_1, x_2, x_3)$。在流场中任取一由闭曲面 S 所围成的体积 G，那么，利用格林公式，在单位时间中流出 G 的流体的质量应为

$$\rho_0\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS=\rho_0\iiint_G \operatorname{div}\boldsymbol{v}dx,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 S 上的单位外法线向量。由质量守恒律，这质量在数值上应等于在单位时间中由 G 内的源所生成的质量，于是成立

$$\rho_0\iiint_G \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dx=\iiint_G f dx.$$

由 G 的任意性，我们得到

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{f}{\rho_0}. \tag{1.3}$$

因假设流动是无旋的，所以存在速度势 $u = u(x)$，使得

$$\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} u. \tag{1.4}$$

将它代入(1.3)，就得到

$$\Delta u = -\frac{f}{\rho_0}.$$

因此，不可压缩稳定无旋流动的速度势应满足三维泊松方程．特别，在无源的情形，速度势满足三维调和方程(1.2)．

【例1.3】 静电场的电势．

设空间有一电量密度为 $\rho(x)$ $(x = (x_1, x_2, x_3))$ 的静电场．在此电场内任取一体积 G，其边界曲面为 S．由静电学知道，通过 S 向外的电通量等于 G 中的总电量的 4π 倍，即成立

$$\iint_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = 4\pi \iiint_G \rho dx,$$

其中 $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3)$ 为电场强度，而 $\boldsymbol{n}$ 为 S 上的单位外法线向量．这样，和例1.2类似地利用格林公式可以得到

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho. \tag{1.5}$$

此外，由库仑定律可知，静电场的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是无旋的，故存在静电势 $u = u(x)$ 使

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u. \tag{1.6}$$

将其代入(1.5)式，就得到静电场的电势 u 满足如下的三维泊松方程

$$\Delta u = -4\pi\rho.$$

特别，如在某一区域中电量密度为零，则在该区域中静电势 u 满足三维调和方程．

【例1.4】 单复变量解析函数．

由单复变函数论知，解析函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy)$ 的实部 $u = u(x, y)$ 和虚部 $v = v(x, y)$ 满足柯西-黎曼方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\tag{1.7}$$

从而易得 u 及 v 均是二维调和函数；反之，任一二维调和函数，均可视为一个单复变量解析函数的实部或虚部．因此，对单复变解析函数的研究原则上都可化为对二维调和函数的研究．我们还将会看到，一般的 n 维 $(n\geqslant 2)$ 调和函数在性质上同样与单复变解析函数有许多相类似的特点．

和热传导方程及波动方程的情形类似，为了具体地确定方程(1.1)或(1.2)的解，还必须附加一定的定解条件．但因为现在方程及解均与时间 t 无关，所以定解条件中只有边界条件而无初始条件．我们称这种只有边界条件而无初始条件的定解问题为**边值问题**．同前二章一样，对泊松方程或调和方程，我们也可以提出三种类型的边值问题，分别称为**第一类边值问题或狄利克雷问题**，**第二类边值问题或诺伊曼问题**以及**第三类边值问题**．本章主要讨论前两类边值问题．

(1) **第一类边值问题(狄利克雷问题)**：在空间 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的某一个有界区域 Ω 的边界 Γ 上给定了一个连续函数 g，要求找出一个在 Ω 中二次连续可微，且在闭区域 $\overline{\Omega}$ 上连续的函数 $u(x)$（简记为 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$），使它在 Ω 中满足 n 维泊松方程(1.1)或 n 维调和方程(1.2)，并在 Γ 上取已给的函数值 g：

$$u|_{\Gamma}=g.\tag{1.8}$$

在稳定温度场的情况，这种边界条件相当于给定了物体在边界上的温度．

(2) **第二类边值问题(诺伊曼问题)**：在 n 维空间某一有界区域 Ω 的光滑边界 Γ 上给出连续函数 g，要求找一个函数 $u(x)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$，使它在 Ω 中满足泊松方程(1.1)或调和方程(1.2)，而在边界 Γ 上的外法向导数取已给的 g 值：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=g,\tag{1.9}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Γ 上的单值外法线向量．

在稳定温度场的情形．这种边界条件相当于给定了物体在边界上的热流量．特别在 $g\equiv0$ 的情形，边界为绝热．

(3) 第三类边值问题：在 n 维空间某一有界区域 Ω 的光滑边界 Γ 上给出连续函数 g 及一个正的连续函数 λ，要求找一个函数 $u(x)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$，使它在 Ω 中满足方程(1.1)或(1.2)，并且在边界 Γ 上成立

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\lambda u\right)\bigg|_{\Gamma}=g, \tag{1.10}$$

其中 n 为 Γ 上的单位外法向量．

在稳定温度场的情形，这种边界条件相当于在物体边界上已知与外界的热交换状况．

上面这些定解问题都是在有界的区域上考虑的．在应用中还会碰到在无界区域上考虑的问题，特别是在一个有界区域之外考虑的问题．例如在考虑流体力学中的绕流问题时，就要确定某有界区域 Ω 外部的流场中的速度分布．如果考虑的是不可压缩流体的无源无旋稳定流动，则其速度势 u 应在 Ω 的外部满足调和方程，而在绕流物体 Ω 的界面 Γ 上，流体速度的法向分量应为零．由(1.4)式，u 应满足边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=0,$$

其中 n 是物体界面 Γ 上的单位法向量．因此决定 Ω 外部流场中的速度分布的问题就归结为求一个在曲面 Γ 外部的无界区域中为调和而在边界 Γ 上满足上述第二类边界条件的函数．又如当确定某物体 Ω(例如电缆) 外部的稳定温度场，而物体表面的温度 f 是事先已知时，就归结为求一个函数 u，使它在 Ω 之外满足泊松方程或者拉普拉斯方程，并且在 Ω 的边界 Γ 上取已给的函数值 f．这种在一个有界区域 Ω 之外考虑的问题统称为泊松方程或拉普拉斯方程的外问题．相应地，在上面的第一个例子中为诺伊曼外问题，第二个例子中为狄利克雷外问题．

拉普拉斯方程或泊松方程的外问题是在无界区域上给出的，

定解问题的解在无穷远处是否可以不加任何限制呢？可以举一个简单的例子说明，在无穷远处如果不加任何限制，外问题的解并不唯一．比如在以原点为中心的单位圆 Γ 外考虑二维拉普拉斯方程的狄利克雷外问题，边界条件取为

$$u|_{\Gamma}=0.$$

容易看出 $u=0$ 和 $u(x,y)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 都是此同一问题的解．因此，为了保证外问题解的唯一性，在无穷远处必须附加一定的条件．通常，在二维情形，我们要求解在无穷远处有界，而在高于二维的情形，要求解在无穷远处均匀地趋近于零：

$$\lim_{r\to\infty}u(x)=0\quad\left(r=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\right).\tag{1.11}$$

为了和外问题相区别，我们把在有界区域 Ω 的内部求解的问题称为相应的内问题．

当然，求解区域也可以既不是一个有界区域的内部，也不是它的外部，例如半空间．这时求解区域仍是无界的，且其边界伸向无穷远．对相应的定解问题，也应在无穷远处添加一定的条件，与外问题情形是类似的．

还有一类在应用上也很重要的边值问题：称为**等值面边值问题**，其相应的边界条件（称为**等值面边界条件**）提法如下：在区域的边界 Γ 上成立

$$\begin{cases}u|_{\Gamma}=\text{待定常数 }C,\\ \displaystyle\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}dS=\text{已知常数 }A.\end{cases}\tag{1.12}$$

下面我们举例说明这种边界条件的定用．

设空间有一金属带电体 Ω，其带电量为 e，要决定其外部空间中的静电场．由例1.3已知静电场的电势 u 满足调和方程．另一方面，由静电学知道，金属带电体 Ω 的表面 Γ 应是一个等势面，记其电势值为 C（待定），而 Γ 上的电通量为 $4\pi e$．因此，就归结为在带电体 Ω 的外部空间求解三维调和方程(1.2)带有下述等值面边界条件的边值问题：

$$\begin{cases} u|_\Gamma = C(\text{待定常数}), \\ \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} dS = 4\pi e, \end{cases} \tag{1.13}$$

其中 n 为 Γ 的单位法向量，指向 Ω 的内部．当然，此时在无穷远处还需附加条件(1.11)．

在等值面边界条件(1.12)中，第二式表示 Γ 上的总电通量(在静电场情形)、总热流量(在稳定温度场情形)或总流量(在稳定无旋流情形)为已知，因此这类边界条件又可称为总流量边界条件．

原则上，等值面边值问题可以化为狄利克雷问题来求解．例如在上例中，可首先求解在 Γ 上具有下述边界条件的狄利克雷问题：

$$u|_\Gamma = 1, \tag{1.14}$$

其解记为 $U = U(x)$．然后选择常数 C，使成立

$$C\int_\Gamma \frac{\partial U}{\partial n} dS = 4\pi e, \tag{1.15}$$

那末 $u = CU$ 就是原等值面边值问题的解．但我们指出，在很多情况下．直接求解等值面边值问题将会带来很大的方便．因此，这种类型的边界条件也应该得到足够的重视．

习　题

1．验证函数

$$u = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{M_0M}}$$

和

$$u = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{M_0M}}$$

在 $M \neq M_0$ 时关于变量 M 及 M_0 分别是二维和三维调和方程的解，其中 r_{M_0M} 为点 M_0 与 M 间的距离．

2．设 $u(x) = f(r)$ 在 $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \neq 0$ 时是 n 维调和函数，证明

$$f(r) = \begin{cases} C_1 + C_2 \ln \frac{1}{r} & (n=2), \\ C_1 + \frac{C_2}{r^{n-2}} & (n>2), \end{cases} \quad (C_1,\ C_2 \text{ 为常数}).$$

3．证明三维拉普拉斯算子在球面坐标 (r, θ, φ) 下可以写成

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

4. 证明三维拉普拉斯算子在柱面坐标(r,θ,z)下可以写成

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

5. 用分离变量法求解由下述调和方程的第一边值问题所描述的矩形平板$(0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b)$上的稳定温度分布：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\\ u(0,y)=u(a,y)=0,\\ u(x,0)=\sin\dfrac{\pi x}{a},\ u(x,b)=0.\end{cases}$$

6. 在膜型扁壳渠道闸门的设计中，为了考察闸门在水压力作用下的受力情况，要在矩形区域$0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b$上求解如下的泊松方程的边值问题：

$$\begin{cases}\Delta u=py+q\quad (p<0,\ q>0\ 均为常数),\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\ u|_{x=a}=0,\\ u|_{y=0,b}=0,\end{cases}$$

试求解之（提示：令$v=u+(x^2-a^2)(fy+g)$，并选择f及g使v满足调和方程）.

7. 举例说明在三维调和方程的狄利克雷外问题中，如果对解$u(x,y,z)$在无穷远处不加趋于零的限制，就不能保证解的唯一性.

§2　格林公式及其应用

2.1　格林(Green)公式

设有界区域Ω的边界Γ分块光滑，函数$u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$，$v\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$，那么下面的公式成立：

$$\int_\Omega v\Delta u dx=\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n}dS-\int_\Omega\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx,\tag{2.1}$$

其中n为Γ上的单位外法线向量.

事实上，利用格林公式，有

$$\int_\Omega v\Delta u\,dx=\int_\Omega v\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}dx=\int_\Omega\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx\\
&=\int_{\Gamma}\sum_{i=1}^{n}v\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(\boldsymbol{n},x_i)dS-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx\\
&=\int_{\Gamma}v\frac{\partial u}{\partial n}dS-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx.
\end{aligned}
$$

这就是(2.1)式.

类似地，若 $u\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$, $v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$，就成立

$$\int_{\Omega}u\Delta v\,dx=\int_{\Gamma}u\frac{\partial v}{\partial n}dS-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx. \tag{2.2}$$

(2.1)及(2.2)称为格林第一公式.

若 $u, v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$，将(2.1)式与(2.2)式相减，就得到

$$\int_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)dx=\int_{\Gamma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS. \tag{2.3}$$

它称为格林第二公式.

特别，若 u 是调和函数，由(2.1)式可得

$$\int_{\Gamma}v\frac{\partial u}{\partial n}dS=\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx; \tag{2.4}$$

若 u 及 v 均为调和函数，由(2.3)式可得

$$\int_{\Gamma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=0. \tag{2.5}$$

2.2 诺伊曼问题解的自由度及可解条件

显然，$u\equiv$ 常数是齐次诺伊曼内问题

$$\begin{cases}\Delta u=0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0\end{cases} \tag{2.6}$$

的解. 反过来，我们可以证明

定理 2.1 若 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 是齐次诺伊曼内问题 (2.6) 的解，那么 u 必恒等于常数.

证明 在公式(2.4)中取 $v=u$，并注意 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0$，即得

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx = 0,$$

从而 u 在 Ω 上恒等于常数. 定理证毕.

利用迭加原理,由定理 2.1 立刻得到:对泊松方程的诺伊曼内问题

$$\begin{cases} \Delta u = f, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = g, \end{cases} \tag{2.7}$$

若它有一个解 u, 则该问题的一切解均可表示为 $u+C$(C 为任意常数)的形式. 换言之,精确到一个附加常数. 诺伊曼内问题的解是唯一确定的.

这里还需指出,要使诺伊曼问题(2.7)有解, f 和 g 还须满足一定的条件. 事实上,在格林第二公式(2.3)中若取 $v\equiv 1$, 就成立

$$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

因此若诺伊曼问题(2.7)有解 u, 则必须满足

$$\int_\Omega f dx = \int_\Gamma g dS. \tag{2.8}$$

条件(2.8)称为诺伊曼问题(2.7)的**可解性条件**. 在稳定温度场的情形,这表示为了达到热量的平衡, Ω 内部热源产生的热量应该等于通过边界 Γ 流出的热量.

我们还可以证明, (2.8)也是使诺伊曼问题(2.7)有解的充分条件

2.3 基本积分公式

在上节习题 1 和习题 2 中我们已经看到,在 $n=2$ 时,

$$u = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2}} \tag{2.9}$$

和 $n>2$ 时

$$u = \frac{1}{\omega_n \left[\sum_{i=1}^n (x_i-x_i^0)^2\right]^{\frac{n-2}{2}}}. \tag{2.10}$$

在点 $M=(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $M_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 不相重合时，关于变量 M 及 M_0 都是相应维数下的调和方程的解，而在 $M=M_0$ 时具有奇性，其中 ω_n 表示 n 维空间中单位球面的面积.

由(2.9)和(2.10)式所表示的函数称为相应维数调和方程的基本解. 下面将会看到，基本解在泊松方程和调和方程的研究中起着非常重要的作用.

从现在开始，我们以三维或二维的调和方程及泊松方程为例来具体进行讨论. 这是在应用中最重要的情况. 其中的绝大部分内容在其它维数的情形仍然成立，并且可以平行地得到.

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为三维有界区域 Ω 中的任意一点. 取 ε 充分小，使以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为中心、ε 为半径的球面 S_ε 与 Ω 的边界 Γ 不相交，并记 S_ε 与 Γ 之间所夹的区域为 Ω_ε. 由于函数

$$v=\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}$$

关于变量 $M(x,y,z)$ 在 Ω_ε 上二阶连续可微，并且在 Ω_ε 上满足调和方程，对任何函数 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$，在区域 Ω_ε 上利用格林第二公式(2.8)，可得

$$\begin{aligned}-\iiint_{\Omega_\varepsilon}&\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}\Delta u(M)d\Omega_M\\=&\iint_\Gamma\left[\frac{u(M)}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]dS_M\\&-\iint_{S_\varepsilon}\left[\frac{u(M)}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial r}\right]dS_M,\end{aligned}$$

其中最后一项积分中 $\dfrac{\partial}{\partial r}$ 为沿着矢径 r_{M_0M} 方向的导数. 注意到

$$\left.\frac{1}{r}\right|_{M\in S_\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{M\in S_\varepsilon}=-\left.\frac{1}{r^2}\right|_{r=\varepsilon}=-\frac{1}{\varepsilon^2},$$

利用积分中值定理，就得到

$$-\iiint_{\Omega_\varepsilon}\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}\Delta u(M)d\Omega_M$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon}u(M)dS_M+\varepsilon\cdot\frac{\partial u}{\partial r}(M^*)$$

$$+\iint_{\Gamma}\left[\frac{u(M)}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]dS_M,$$

其中 $M^*\in S_\varepsilon$.

令 $\varepsilon\to0$, 上式右边第一项的极限为 $u(M_0)$, 第二项的极限为零, 从而得到

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{1}{r_{M_0M}}\Delta u(M)d\Omega_M$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]dS_M, \tag{2.11}$$

其中 $M=(x,y,z)$. 此公式称为基本积分公式, 它对一切 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$成立, 而 M_0 为 Ω 中的任一内点.

特别, 如果 u 为调和函数, 则对任意内点 $M_0\in\Omega$, 成立

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]dS_M. \tag{2.12}$$

它称为调和函数的基本积分公式.

公式(2.12)表明, 调和函数在区域 Ω 中任一内点的值可以利用基本解通过 u 及其法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在边界 Γ 上的积分来表出. 在下一节中, 我们将利用这个公式来构造定解问题的解.

用完全类似的方法可以得到在其它维数下的基本积分公式和调和函数的基本积分公式. 以二维为例, 它们分别为

$$u(x_0,y_0)=-\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\Delta u(M)dxdy$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right)\right.$$

$$-\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\Bigg]dS_M \quad (2.13)$$

和

$$u(x_0,y_0)=-\frac{1}{2\pi}\iint_{\Gamma}\Bigg[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right)$$

$$-\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\frac{\partial u}{\partial n}(M)\Bigg]dS_M, \quad (2.14)$$

其中 $M=(x,y)$.

上面这些基本积分公式是在假设 Ω 为有界区域时得到的. 如果 Ω 为无界区域, 只要对 $u(M)$ 在无穷远处加上适当的衰减条件, 这些公式仍能成立. 仍以三维情形为例, 如果 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$, 且在无穷远处成立

$$u(M)=O\left(\frac{1}{r_{0M}^{\alpha}}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(M)=O\left(\frac{1}{r_{0M}^{1+\alpha}}\right),$$

其中 $\alpha>0$, $r_{0M}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 那么(2.11)及(2.12)式仍然成立(证明作为习题).

2.4 泊松方程

利用基本积分公式(2.11), 很容易导得泊松方程的一个特解的表达式.

事实上, 假设有函数 $u(M)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$, 满足

$$\Delta u=f, \quad (2.15)$$

其中 $f\in C^0(\Omega)$, 那末由基本积分公式(2.11), 对 Ω 中的任一内点 M_0 就有

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{f(M)}{r_{M_0M}}\,d\Omega_M$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]dS_M,$$

由基本解的性质，易见上式中的第二项积分关于变量 M_0 在 Ω 内部满足调和方程．于是，由迭加原理并注意到(2.15)式，函数

$$v(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{f(M)}{r_{M_0M}}\,d\Omega_M \tag{2.16}$$

应是泊松方程(2.15)的一个特解．

在二维的情况，同样可以得到：如果二维泊松方程(2.15)有解 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$，那么

$$v(M_0) = -\frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{\Omega}f(M)\ln\frac{1}{r_{M_0M}}d\Omega_M \tag{2.17}$$

是(2.15)的一个特解．

应该注意，上面我们只是在泊松方程(2.15)有解的假定下推得(2.16)和(2.17)所表示的函数分别是三维和二维情形下的一个特解．在§5中我们还将证明：对任意给定的 $f\in C^1(\overline{\Omega})$，由(2.16)和(2.17)式所表示的函数一定是相应的泊松方程的一个特解．

在静电学中，假如带电体 Ω 的电量密度为 $\rho(M)$，那么

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(M)}{r_{M_0M}}\,d\Omega_M$$

就表示带电体 Ω 在 M_0 点所产生的电势，称为带电体的体位势．在其中取

$$\rho(M) = -\frac{1}{4\pi}f(M),$$

就得到(2.16)式所给出的函数．由上述，有

$$\Delta_{M_0}v(M) = f(M_0) = -4\pi\rho(M_0),$$

这正是§1例1.3中所推得的方程．因此，(2.16)式的右端可视为电量密度为 $-\dfrac{1}{4\pi}f(M)$ 的带电体 Ω 在 M_0 点所产生的电势，称为体位势．

利用体位势，就可将泊松方程的求解问题通过迭加原理化为调和方程的求解问题．

2.5 平均值定理与极值原理

这里以三维情形为例来加以说明，其它维数的情形是完全同样的.

定理 2.2 设函数 u 在以曲面 Γ 为边界的区域 Ω 中调和，在 $\Omega+\Gamma$ 上有连续的一阶偏导数，则成立

$$\iint_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0. \tag{2.18}$$

证明 直接利用格林公式，或在诺伊曼问题的可解性条件(2.8)中令 $f=0$ 即得此定理.

定理 2.3(平均值定理) 以 $B_R(M_0)$ 表示以 M_0 为球心、R 为半径的球，其边界为 $S_R(M_0)$. 设 u 在 $B_R(M_0)$ 中调和，在 $\overline{B}_R(M_0)=B_R(M_0)+S_R(M_0)$ 上连续，则成立

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S_R(M_0)}udS, \tag{2.19}$$

即 u 在球心 M_0 的值应等于 u 在球面 $S_R(M_0)$ 上的算术平均值.

证明 首先假设 $u\in C^2(B_R(M_0))\cap C^1(\overline{B}_R(M_0))$. 在 $B_R(M_0)$ 上应用基本积分公式(2.12)，得到

$$\begin{aligned}u(M_0)&=-\frac{1}{4\pi}\iint_{S_R(M_0)}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]dS_M\\&=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S_R(M_0)}u(M)dS_M+\frac{1}{4\pi R}\iint_{S_R(M_0)}\frac{\partial u}{\partial n}dS_M.\end{aligned}$$

利用定理 2.2，上式右端的第二项积分为零，从而得到(2.19)式.

若 $u\in C^2(B_R(M_0))\cap C^0(\overline{B}_R(M_0))$，则先在一个半径略小于 R 的球上应用公式(2.19)，然后利用一个取极限的手续，就可以得到定理所要求的结论. 定理 2.3 证毕.

利用上述的平均值定理，就可以证明如下的

定理 2.4(极值原理) 设 u 在区域 Ω 中调和，则除 u 恒等于

常数的情况外，u 在 Ω 的任何内点上的值，不可能等于 u 在 Ω 上的上界 $\sup\limits_{\Omega} u$ 与下界 $\inf\limits_{\Omega} u$ 的数值.

证明　我们仅需对上界情形证明．因为只要将 u 换为 $-u$，就可相应地得到对下界情形的结果.

如果 $\sup\limits_{\Omega} u=+\infty$，则结论自然成立．现考察 $\sup\limits_{\Omega} u=m<+\infty$ 的情形．设存在 $M_0\in\Omega$，使 $u(M_0)=m$，我们只要证明此时 u 必在整个区域 Ω 上恒等于常数 m．为此，记在 Ω 中使 u 取值为 m 的点所构成的集合为 K：

$$K=\{M\,|\,M\in\Omega,\ u(M)=m\},$$

我们要证明 $K\equiv\Omega$.

由于 $M_0\in K$，K 是一个非空的集合．又由 $u(M)$ 在 Ω 上的连续性，显然 K 是一个在 Ω 上的相对闭集．因此，只要证明 K 同时又是一个开集，就有 $K\equiv\Omega$，从而得到所要求的结论.

现在证明 K 是一个开集．为此，对任何 $M_1\in K$，记 $S_R(M_1)$ 为以 M_1 为球心、以 R 为半径且整个落在 Ω 内部的球面，我们先证明此时必有 $u|_{S_R(M_1)}\equiv m$．用反证法．假设有点 $\overline{M}\in S_R(M_1)$，使 $u(\overline{M})<m$．由函数的连续性，在 $S_R(M_1)$ 上必有 $\overline{M}$ 的一个邻域 Σ，在其上 $u(M)<m$；而在 $S_R(M_1)\backslash\Sigma$ 上，总有 $u(M)\leqslant m$．于是

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{S_R(M_1)} udS=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Sigma} udS+\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{S_R(M_1)\backslash\Sigma} udS$$

$$<m=u(M_1).$$

但由平均值定理，上式左边应等于 $u(M_1)$，这就导致矛盾．所以 u 在球面 $S_R(M_1)$ 上恒等于 m．由此立即推得在以 M_1 为球心、R 为半径的球 $B_R(M_1)$ 上，均有 $u(M)\equiv m$，即 $B_R(M_1)\subset K$，因此 K 是一个开集．定理证毕.

系 2.1　设 Ω 为有界区域，其边界为 Γ，u 在 Ω 中调和，且在 $\overline{\Omega}$ 上连续，则 u 必在边界 Γ 上取到它在 Ω 上的最大值与最小值，即成立

$$\max_{\Omega+\Gamma} u = \max_{\Gamma} u, \quad \min_{\Omega+\Gamma} u = \min_{\Gamma} u.$$

系 2.2 若 u 及 v 都在有界区域 Ω 中调和，在 $\overline{\Omega}$ 上连续，且在 Ω 的边界 Γ 上成立 $u \leqslant v$，那么除去在 Ω 上 $u \equiv v$ 的情况外，在 Ω 的内部恒成立 $u < v$.

2.6 狄利克雷问题解的唯一性与稳定性

利用极值原理，立即可以推出调和方程或泊松方程狄利克雷内问题与外问题解的唯一性及稳定性.

定理 2.5 泊松方程的狄利克雷内问题的解如果存在，必定是唯一的，并且连续地依赖于边界条件.

证明 设 u_1, u_2 是所考察的泊松方程狄利克雷内问题的两个解，那么 $u = u_1 - u_2$ 满足调和方程并且在区域边界 Γ 上为零. 由系 2.1，u 的最大值及最小值均在 Γ 上达到，从而 $u \equiv 0$，即 $u_1 \equiv u_2$. 这就证明了解的唯一性.

现设 u_1, u_2 均为同一泊松方程的解，并且分别满足边界条件

$$u_i|_\Gamma = g_i \quad (i = 1, 2),$$

那么 $u = u_1 - u_2$ 为调和函数，并且满足

$$u|_\Gamma = g_1 - g_2.$$

由系 2.1，

$$\max_{\Omega+\Gamma} u = \max_{\Gamma}(g_1 - g_2),$$

$$\min_{\Omega+\Gamma} u = \min_{\Gamma}(g_1 - g_2).$$

因此，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，只要

$$\max_{\Gamma} |g_1 - g_2| \leqslant \varepsilon,$$

就有

$$\max_{\Omega+\Gamma} |u_1 - u_2| \leqslant \varepsilon.$$

这就证明了解对边界条件的连续依赖性. 定理证毕.

对于泊松方程的狄利克雷外问题或者在无界区域上的狄利克雷问题，利用解在无穷远处均匀地趋向于零的条件：

$$\lim_{r\to\infty} u(x, y, z) = 0 \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \tag{2.20}$$

及极值原理，同样不难得到解的唯一性及关于边界条件的连续依赖性．事实上，设 u_1，u_2 是所考察的泊松方程狄利克雷外问题的两个解，则 $u=u_1-u_2$ 是调和函数，且满足 $u|_\Gamma=0$ 及(2.20)．若 u 不恒等于零，则必存在一点 M，使 $u(M)\neq 0$．不妨设 $u(M)>0$．以 Γ_R 表示以原点为心、R 为半径的球面．取 R 充分大，使点 M 落在由 Γ 及 Γ_R 所围成的区域 Ω_R 中，且由(2.20)式可使 $|u|_{\Gamma_R}|<u(M)$．这样，调和函数 u 在有界区域 Ω_R 的边界上就达不到它在 Ω_R 上的最大值，与系 2.1 矛盾．于是 u 只能恒等于零，这就证明了泊松方程的狄利克雷外问题的解的唯一性．此时解关于边界条件的连续依赖性也可以类似地加以证明(作为习题)．

习　题

1．设 Ω 为有界区域，Γ 为其边界，证明等值面边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=f,\\ u|_\Gamma=c(\text{待定常数}),\\ \displaystyle\int_\Gamma\frac{\partial u}{\partial n}dS=A_0(\text{已知常数})\end{cases}$$

有解的必要条件为

$$\int_\Omega f dx=A_0.$$

2．若 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 是如下等值面边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=f,\\ u|_\Gamma=c(\text{待定常数}),\\ \displaystyle\int_\Gamma\frac{\partial u}{\partial n}dS=A_0(\text{已知常数})\end{cases}$$

的解，证明此问题的一切解均可以表示为 u 和任一常数之和的形式．

3．设 Ω 为三维空间中具光滑边界 Γ 的有界区域，u 在 Ω 中调和，证明

$$-\iint_\Gamma\left(u(M)\frac{\partial\frac{1}{r_{M_0M}}}{\partial n}-\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right)dS_M$$

$$=\begin{cases}0, & (\text{若 } M_0 \text{ 在 } \Omega \text{ 外}),\\ 2\pi u(M_0), & (\text{若 } M_0 \text{ 在 } \Gamma \text{ 上}),\\ 4\pi u(M_0), & (\text{若 } M_0 \text{ 在 } \Omega \text{ 内}).\end{cases}$$

4．推导二维情形的基本积分公式(2.13)．

5．设 Ω 为以 M_0 为球心、R 为半径的球，$u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$，且在 Ω 中调和，证明

$$u(M_0)=\frac{3}{4\pi R^3}\iiint_\Omega u(M)d\Omega_M.$$

6．设 u 为区域 Ω 中的二阶连续可微函数，如果对 Ω 中的任一球面 S，都成立

$$\int_S\frac{\partial u}{\partial n}dS=0,$$

证明 u 为 Ω 中的调和函数．

7．利用基本积分公式证明处处满足平均值公式的二阶连续可微函数一定是调和函数．

8．设 Ω 为 n 维空间中的一个有界区域，其边界为 Γ．证明若 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 是下述定解问题的解：

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+c(x)u=0,\\ u|_\Gamma=0,\end{cases}$$

则 $u\equiv0$．其中 $c(x)\leqslant0$，面矩阵 $(a_{ij}(x))$ 在 Ω 上正定．

9．举例说明当 $c>0$ 时，方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+cu=0$$

的狄利克雷问题的解的唯一性不一定成立．

10．设 Ω 为有界区域，Γ 为其边界，证明泊松方程的第三边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=f,\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+\lambda u\right)\Big|_\Gamma=g\quad(\lambda>0)\end{cases}$$

的解的唯一性．

11．设 u 为区域 Ω 中的二阶连续可微函数，在 $\overline{\Omega}$ 上连续，且 $\Delta u=f>0$，则 u 在 Ω 的任何内点的值都不可能等于 u 在 Ω 上的上界的数值．

§3　格林函数及其应用

3.1　格林函数的定义及性质

先仍以三维情形为例来进行说明．

对于在区域 Ω 中调和，在 $\overline{\Omega}$ 上具有一阶连续偏导数的函数 u，我们已有基本积分公式

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma}\left(u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right)dS_M, \tag{3.1}$$

其中 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为 Ω 中任一内点. 这个公式用 u 及其法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在边界上的值来表示 u 在 Ω 内部任一点的值. 由此自然使我们想到能否利用它来求解调和方程的边值问题. 但由于这个公式中同时需要 u 及 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 二者在 Γ 上的数值,所以还不能直接利用它来求解狄利克雷问题或诺伊曼问题. 以狄利克雷问题为例, 其中 u 在 Γ 上的值是给定的,但 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在 Γ 上的值事先并不知道, 必须在整个区域 Ω 上求得问题的解以后才能决定, 因此不能直接利用(3.1)式来进行求解. 对诺伊曼问题的情况类似.

那么, 能不能有一个调和方程的定解问题, 在区域 Ω 的边界 Γ 上同时给定 u 及 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的值作为边界条件呢? 这是不可能的. 因为前面已经证明狄利克雷问题的解是唯一的, 所以对调和方程而言, 给定了解在边界上的值已完全确定了解在边界上的法向导数值, 而不能事先任意指定.

这样, 为了利用调和函数的基本积分公式来求解狄利克雷问题, 必须设法在这个公式中消去含有 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的一项. 这就需要引进下述的格林函数的概念.

已知 u 及 g 为 Ω 中的调和函数, 且在 $\overline{\Omega}$ 上具有一阶连续偏导数, 那么就成立格林第二公式

$$0=\iint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS_M. \tag{3.2}$$

将(3.1)式与(3.2)式相加, 得到

$$u(M_0)=-\iint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}-g\right)\right.$$

$$-\left(\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}-g\right)\frac{\partial u}{\partial n}\Big)dS_M, \tag{3.3}$$

其中 M_0 为 Ω 中的任一内点．因此，只要取函数 $g=g(M, M_0)$，使它对变量 M(视 M_0为参变量)满足

$$\begin{cases}\Delta_M g=0,\\ g|_\Gamma=\dfrac{1}{4\pi r_{M_0M}},\end{cases} \tag{3.4}$$

就可以消去上式中含 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 的积分项．这样(3.3)式就变为

$$u(M_0)=-\iint_\Gamma u\frac{\partial G}{\partial n}dS_M,$$

其中

$$G(M, M_0)=\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}-g(M, M_0). \tag{3.5}$$

因此，调和方程的狄利克雷问题

$$\begin{cases}\Delta u=0,\\ u|_\Gamma=\varphi\end{cases} \tag{3.6}$$

的解就可以表示为如下的形式：

$$u(M_0)=-\iint_\Gamma \varphi(M)\frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_0)dS_M. \tag{3.7}$$

用(3.5)式表示的函数 $G(M, M_0)$称为**格林函数**，利用它就可以得到狄利克雷问题(3.6)的解的表达式(3.7)．这个方法称为**格林函数法**．

这里指出，从上面的推导过程可见，若 $g(M, M_0)$关于变量 M 在 $\overline{\Omega}$ 上具有连续一阶偏导数，且狄利克雷问题 (3.6) 的解存在并具有同样的光滑性 (在 Ω 为无界区域的情形，还要求在无穷远处有适当的衰减条件)，那么公式(3.7)一定成立．然而，在实际求解的过程中，上面这些要求通常是无法或无需事先得到保证的．因此(3.7) 只给出所考察的狄利克雷问题的形式解．在求得格林函数 G 并得到形式解的表达式后，为了证实它的确给出问题的解，还必须进行验证，完成求解的综合过程．

这样，用格林函数法求解狄利克雷问题(3.6)，有两个步骤：第一步是求格林函数 $G(M, M_0)$，并得到形式解(3.7)；第二步是验证形式解(3.7)是真正的解，即满足(3.6)。

由(3.5)式，为了求格林函数 G，只要求解定解问题(3.4)。这里，(3.4)仍是一个调和方程的狄利克雷问题，所不同的只是边界条件具有特殊的形式。对于一般的区域，要证明这种特殊的狄利克雷问题的解的存在性，和证明在这个区域上一般的狄利克雷问题的解的存在性通常是同样困难的。但是对于一些特殊的区域，例如球、半空间等等，格林函数却可以用简单的方法求得。此外，格林函数仅依赖于区域，而与边界条件无关。因此，如果求得了某个区域上的格林函数，那么这个区域上的一切狄利克雷问题的解就可利用格林函数通过积分公式(3.7)表达出来。另一方面，在已知狄利克雷问题解的存在性后，还可以利用公式(3.7)来讨论解的性质。这些都是利用格林函数法的优点。

下面我们将对一些特殊的区域介绍格林函数的求法。在此之前，我们先在格林函数存在的前提下介绍格林函数的一些重要的性质。

由格林函数的定义(3.4)及(3.5)可见，格林函数 $G(M, M_0)$ 和函数 $g(M, M_0)$ 都是变量 M 的函数，同时还是参变量 M_0 的函数。由格林函数的定义及公式(3.7)，不难证明

定理3.1　格林函数 $G(M, M_0)$ 除去 $M=M_0$ 外，关于变量 M 处处满足调和方程；且当 $M\to M_0$ 时，$G(M, M_0)$ 趋于无穷大，其奇性和基本解 $\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}$ 相同。此外，在边界 Γ 上 $G(M, M_0)$ 恒等于零。

定理3.2

$$\iint_\Gamma \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M}\, dS_M = -1.$$

利用调和函数的极值原理，不难证明

定理3.3　在区域 Ω 内成立

$$0<G(M, M_0)<\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}.$$

利用与推导基本积分公式相类似的方法,我们可以证明

定理3.4 设 M_1, M_2 为区域 Ω 中不相重合的两点,则

$$G(M_1, M_2)=G(M_2, M_1),$$

即格林函数 G 关于自变量 M 及参变量 M_0 具有对称性.

这些定理的详细证明留作习题.

3.2 静电源象法

现在说明格林函数在静电学中的物理意义,并由此在特殊区域的情形给出格林函数的求法.

设在点 M_0 处放置一个 $\frac{1}{4\pi}$ 单位的点电荷,那么它在自由空间所产生的电场的电势为 $\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}$. 如果在 M_0 点的点电荷被包围在一个封闭的导体表面 Γ 内,而这个导体的外表面接地,则此时在 Γ 内部电场的电势就可由此点电荷所产生的电势 $\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}$ 以及导体内表面上感应(负)电荷所产生的感应电势 $-g(M, M_0)$ 这两部分合成,它在导体表面 Γ 上恒等于零.由此,立刻可见 $g(M, M_0)$ 恰为问题(3.4)的解,从而在 Γ 内部电场的电势就可以用格林函数

$$G(M, M_0)=\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}-g(M, M_0)$$

来表示. 因此,求格林函数的问题就归结为求这个感应电势的问题. 当区域的边界 Γ 具有某种特殊的形状时,这个感应电势可由对称性用简单的方法求得.

假设在 Γ 所包围区域 Ω 外也有一个点电荷,它同样产生一个电势. 如果这两个点电荷所产生的电势在 Γ 上恰巧互相抵消,那么这个假想的点电荷在 Ω 内所产生的电势就等于所要求的感应电势. 可以想象,这个假想点电荷的位置应该是 M_0 关于 Γ 在某种意义下的对称点. 这种利用对称性求格林函数的方法,称为静电

源象法(或称镜象法). 这种方法，由于利用了对称性，所以只能用来在具有某种对称性的特殊区域上求格林函数，而且这种假想的点电荷有时也可能不止是一个. 作为例子，下面我们对一些常见的特殊区域介绍其相应的格林函数的求法.

【例 3.1】 上半空间的格林函数.

设区域 Ω 为上半空间 $z>0$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为其中的一点. 此时易见，若取 M_1 为 M_0 关于 $z=0$ 的对称点，即 $M_1=(x_0, y_0, -z_0)$, 那么相应的格林函数就可表示为

$$G(M, M_0)=\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}-\frac{1}{4\pi r_{M_1M}}. \tag{3.8}$$

【例 3.2】 球的格林函数.

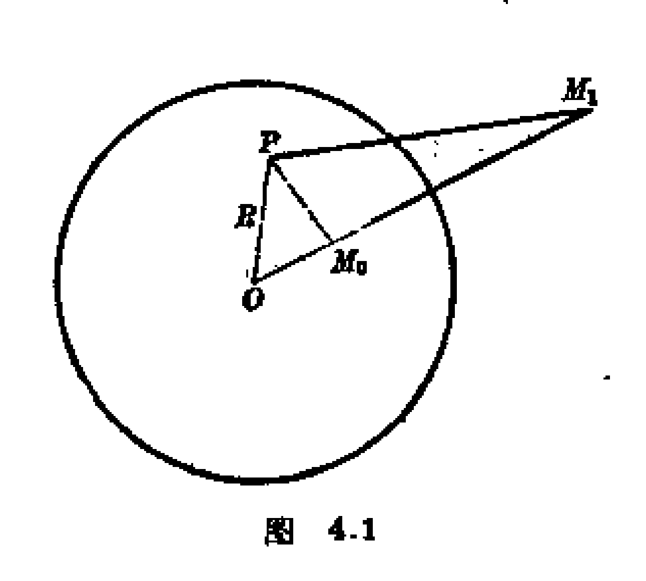


图 4.1

设 K 为以原点 O 为球心、R 为半径的球面，$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球内任一点，暂设它不是原点. 在 M_0 点放置一个 $\frac{1}{4\pi}$ 单位的电荷，在半射线 OM_0 上截取线段 OM_1，使

$$\rho_0\rho_1=R^2, \tag{3.9}$$

其中 $\rho_0=r_{OM_0}$, $\rho_1=r_{OM_1}$, 称点 M_1 为 M_0 关于球面 K 的反演点. 设 P 是球面 K 上的任一点，考察三角形 OPM_0 及 OPM_1(参见图 4.1)，它们在点 O 有公共角，而夹此角的二对应边按(3.9)式是成比例的，因此这两三角形相似. 由相似性得到，对球面 K 上任意一点 P 必有

$$r_{M_1P}=\frac{R}{\rho_0}r_{M_0P}.$$

假想在点 M_1 处有一点电荷，根据上式，为了使它所产生的电势在球面上恰巧与 M_0 处点电荷所产生的电势抵消，只须假设在 M_1 处的点电荷带有电量 $\frac{-R}{4\pi\rho_0}$. 因此，

$$g(M, M_0)=\frac{1}{4\pi}\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_{M_1M}},$$

而以 K 为边界面的球的格林函数为

$$G(M, M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}-\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_{M_1M}}\right). \tag{3.10}$$

(3.10)式是在假设 M_0 不是原点时推导的. 如果 $M_0=O$ 为原点, 显见

$$G(M,O)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{OM}}-\frac{1}{R}\right). \tag{3.11}$$

但由(3.9)式并注意到此时 M_0 的反演点在无穷远, 易知(3.11)是(3.10)式当 $\rho_0\to 0$ 时的极限情况. 因此球的格林函数 G 可统一地用(3.10)式表示.

在二维的情形, 利用基本解 $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}$, 格林函数可以和三维情形一样的定义. 对一些特殊的区域, 格林函数也可利用静电源象法求得.

【例 3.3】 上半平面的格林函数.

与例 3.1 类似地可得上半平面 $y>0$ 的格林函数为

$$G(M, M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_{M_1M}}{r_{M_0M}}, \tag{3.12}$$

其中 M_1 为 M_0 关于 $y=0$ 的对称点.

【例 3.4】 圆的格林函数.

用与例 3.2 完全同样的方法可得以原点 O 为中心、以 R 为半径的圆的格林函数为

$$G(M, M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho_0 r_{M_1M}}, \tag{3.13}$$

其中 M_1 为 M_0 关于圆的反演点: $\rho_0\rho_1=R^2$, 其中 $\rho_0=r_{OM_0}$, $\rho_1=r_{OM_1}$.

【例 3.5】 四分之一平面的格林函数.

设区域 Ω 为第一象限 $\{(x, y)\,|\,x>0, y>0\}$, $M_0(x_0, y_0)$ 为其中的一点. 此时, 利用镜面反射, 可得 M_0 的三个对称点 $M_1(-x_0, y_0)$, $M_2(x_0, -y_0)$ 及 $M_3(-x_0, -y_0)$, 而相应的格林函数为

$$G(M, M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_{M_1M}}{r_{M_0M}}\frac{r_{M_2M}}{r_{M_3M}}. \tag{3.14}$$

3.3 调和方程狄利克雷问题的解

上面我们已经对一些特殊的区域求得了格林函数，于是利用表达式(3.7)就可以得到调和方程在相应区域上的狄利克雷问题(3.6)的形式解.

以球上的狄利克雷问题为例,其格林函数由(3.10)式给出.为利用公式(3.7),需要计算$\frac{\partial G}{\partial n}$在球面$K$上之值. 因为

$$\frac{1}{r_{M_0M}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma}},$$

$$\frac{1}{r_{M_1M}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_1^2+\rho^2-2\rho_1\rho\cos\gamma}},$$

其中$\rho=r_{OM}$, γ是$\overrightarrow{OM}_0$和$\overrightarrow{OM}$的夹角(也是$\overrightarrow{OM}_1$和$\overrightarrow{OM}$的夹角),由(3.10)及(3.9)式

$$G(M, M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma}}-\frac{R}{\sqrt{\rho_0^2\rho^2-2\rho_0\rho R^2\cos\gamma+R^4}}\right).$$

在球面K上,

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\rho=R}=\left.\frac{\partial G}{\partial \rho}\right|_{\rho=R}=-\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\rho-\rho_0\cos\gamma}{(\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma)^{3/2}}-\frac{R(\rho_0^2\rho-R^2\rho_0\cos\gamma)}{(\rho_0^2\rho^2-2\rho_0\rho R^2\cos\gamma+R^4)^{3/2}}\right\}\Bigg|_{\rho=R}$$

$$=-\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-\rho_0^2}{(R^2-2R\rho_0\cos\gamma+\rho_0^2)^{3/2}}.$$

因此,由(3.7)式得到狄利克雷问题(3.6)的解的表达式为

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint_K\frac{R^2-\rho_0^2}{(R^2-2R\rho_0\cos\gamma+\rho_0^2)^{3/2}}\varphi(M)dS_M, \tag{3.15}$$

或写为球坐标的形式

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varphi(R, \theta, \varphi) \times \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 - 2R\rho_0\cos\gamma + \rho_0^2)^{3/2}} \sin\theta d\theta d\varphi, \tag{3.15'}$$

其中$(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$是点$M_0$的球坐标，$(R, \theta, \varphi)$是球面$K$上的点$M$的球坐标，而$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)$.

(3.15)或(3.15′)式称为球的泊松公式.

在半空间的情形，由于在边界$z=0$上，$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z}$，而在$z=0$上

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right) = \frac{2z_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}},$$

由(3.12)及(3.8)两式可得相应的狄利克雷问题解的表达式(称为上半空间的泊松公式)为

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, y)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}} dx dy. \tag{3.16}$$

对于圆上的狄利克雷问题，我们有

$$\frac{1}{r_{M_0M}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma}},$$

$$\frac{1}{r_{M_1M}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_1^2+\rho^2-2\rho_1\rho\cos\gamma}},$$

其中γ是$\overrightarrow{OM_0}$和$\overrightarrow{OM}$的夹角. 设M_0的极坐标为(ρ_0, θ_0)，M的极坐标为(ρ, θ)，则易知

$$\cos\gamma = \cos(\theta - \theta_0).$$

再利用$\rho_0\rho_1 = R^2$，可得在圆周$\rho = R$上成立

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{\partial G}{\partial \rho}=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma}}\right.$$

$$\left.-\ln\frac{R}{\sqrt{\rho_0^2\rho^2-2\rho_0\rho R^2\cos\gamma+R^4}}\right]$$

$$=-\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos\gamma+\rho_0^2}.$$

于是由(3.7)式可得圆的泊松公式为

$$u(\rho_0,\ \theta_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_{x^2+y^2=R^2}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos\gamma+\rho_0^2}\varphi(M)dS$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-\rho_0^2)\varphi(\theta)}{R^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2}d\theta. \qquad (3.17)$$

它是圆上狄利克雷问题的解的表达式.

3.4　解的验证

正如前面一再强调的，我们至此还只是得到了定解问题的形式解，究竟它们是不是相应问题的真正的解还需要加以验证．为了方便计，我们这里仅对圆上的狄利克雷问题的解的表达式(3.17)进行验证，对球及半空间等情形的验证可类似地进行.

定理 3.5　设 $\varphi(\theta)$ 为 θ 的周期为 2π 的连续函数，那么由(3.17)式所表示的函数是圆上狄利克雷问题(3.6)的解.

证明　由定理 3.4，当 M 及 M_0 为圆内的不同两点时，成立 $G(M,\ M_0)=G(M_0,\ M)$，从而 $\Delta_{M_0}G(M,\ M_0)=\Delta_{M_0}G(M_0,\ M)=0$．再由 G 的表达式(3.13)，当 $M\neq M_0$ 时，G 是各个变量的无穷可微函数，因而 $\Delta_{M_0}\partial_M G(M,\ M_0)=\partial_M\Delta_{M_0}G(M,\ M_0)=0$，其中 ∂_M 表示关于变量 $M(x,\ y)$ 在任意方向上的一阶偏导数．于是，由 G 的光滑性，当 M 在圆周 Γ 上时上式也成立(M_0 为圆内任一点)．这样，在(3.7)中将求导通过积分号(因 M_0 为圆内的点，积分无奇性)，就得

$$\Delta_{M_0}u(M_0)=\Delta_{M_0}\left(-\iint_\Gamma\varphi(M)\frac{\partial G(M,\ M_0)}{\partial n_M}dS_M\right)$$

$$= -\iint_{\Gamma} \varphi(M) \Delta_{M_0} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} dS_M = 0.$$

这证明了(3.17)式表示的函数 $u(M_0)$ 满足调和方程.

现在我们证明 $u(M_0)$ 满足所给的边界条件, 即证明

$$\lim_{\substack{\rho_0 \to R \\ \theta_0 \to \theta_0^*}} u(\rho_0, \theta_0) = \varphi(\theta_0^*). \tag{3.18}$$

事实上, 利用 $\varphi(\theta)$ 的周期性, 可将(3.17)式改写为

$$u(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 - 2R\rho\cos\theta + \rho_0^2} \varphi(\theta + \theta_0) d\theta; \tag{3.19}$$

又由 G 的具体表达式(3.13), 此时 $g(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho_0 r_{M_1 M}}$ 对变量 M 在整个闭圆域上无穷可微, 因此由定理 3.2 可得

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 - 2R\rho_0\cos\theta + \rho_0^2} d\theta. \tag{3.20}$$

由上述两式就得到

$$u(\rho_0, \theta_0) - \varphi(\theta_0^*) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 - 2R\rho_0\cos\theta + \rho_0^2} \cdot \times (\varphi(\theta + \theta_0) - \varphi(\theta_0^*)) d\theta. \tag{3.21}$$

由 φ 的连续性, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正数 η, 使当 $|\theta| \leqslant \eta$ 且 $|\theta_0 - \theta_0^*| \leqslant \eta$ 时, 成立

$$|\varphi(\theta + \theta_0) - \varphi(\theta_0^*)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.22}$$

于是, 可将(3.21)式改写为

$$u(\rho_0, \theta_0) - \varphi(\theta_0^*) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\eta} + \int_{-\eta}^{+\eta} + \int_{\eta}^{\pi}\right) \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 - 2R\rho_0\cos\theta + \rho_0^2} \times (\varphi(\theta + \theta_0) - \varphi(\theta_0^*)) d\theta = I_1 + I_2 + I_3.$$

其中, 由(3.22)式及(3.20)式,

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{3} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 - 2R\rho_0\cos\theta + \rho_0^2} d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{3} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 - 2R\rho_0\cos\theta + \rho_0^2} d\theta = \frac{\varepsilon}{3}.$$

此外, 当 $\theta \in [\eta, \pi]$ 时, 有 $\cos\theta \leqslant \cos\eta$, 因此

$$R^2 - 2R\rho_0\cos\theta + \rho_0^2 \geqslant R^2 - 2R\rho_0\cos\eta + \rho_0^2$$

$$= (R-\rho_0)^2+2R\rho_0(1-\cos\eta) \geqslant 4R\rho_0 \sin^2\frac{\eta}{2} > 0,$$

于是，若设 $|\varphi(\theta)| \leqslant M$，就有

$$|I_3| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_\eta^\pi \frac{R^2-\rho_0^2}{4R\rho_0\sin^2\frac{\eta}{2}}\cdot 2M d\theta \leqslant \frac{R^2-\rho_0^2}{4R\rho_0\sin^2\frac{\eta}{2}}\cdot M.$$

这样，必存在正数 δ，使当 $|\rho_0-R|\leqslant\delta$ 时，成立

$$|I_3| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

类似地可得

$$|I_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

综上所述，当 $|\rho_0-R|\leqslant\delta$, $|\theta_0-\theta_0^*|\leqslant\eta$ 时，成立

$$|u(\rho_0, \theta_0)-\varphi(\theta_0^*)| \leqslant \varepsilon,$$

这就证明了(3.18)式．定理证毕．

3.5 二维单连通区域上的格林函数

在§3.2中，我们已对特殊的区域求得了格林函数．在二维的情形，我们还可借助单复变函数论中共形映照的办法来求得一般单连通区域上的格林函数．

设 Ω 为 (x, y) 平面上的单连通区域，其边界为 Γ；C 为 (ξ, η) 平面上的单位圆内部，其边界为 S．任取 $(x_0, y_0)\in\Omega$，记 $z=x+iy$, $z_0=x_0+iy_0$．由关于共形映照的黎曼定理，存在解析函数 $w=f(z, z_0)$ 将区域 $\overline{\Omega}$ 单叶地映照为 $w=\xi+i\eta$ 平面上的闭单位圆 $\overline{C}$，将 Ω 的边界 Γ 映照为 C 的边界 S，将点 $z=z_0$ 映照为坐标原点 $w=0$：

$$f(z_0, z_0)=0, \tag{3.23}$$

并且满足

$$f_z(z, z_0)|_{z=z_0}\neq 0. \tag{3.24}$$

现在我们证明

$$G(x, y; x_0, y_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|f(z, z_0)|} \tag{3.25}$$

就是区域 Ω 上的格林函数．为此我们只需证明

(i) 当 $z\in\Gamma$ 时，$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|f(z,z_0)|}=0$.

(ii) 将 G 改写为

$$G(x,y;x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-z_0|}-\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{f(z,z_0)}{z-z_0}\right|,$$

那么可以补充定义 $\frac{f(z,z_0)}{z-z_0}$ 在 $z=z_0$ 之值，使右端第二项关于 $(x,y)\in\Omega$ 为调和.

注意到 $z\in\Gamma$ 时，$f(z,z_0)\in S$，故 $|f(z,z_0)|=1$，于是(i)成立.

由(3.23)式，当 $z\neq z_0$ 时，

$$\frac{f(z,z_0)}{z-z_0}=\frac{f(z,z_0)-f(z_0,z_0)}{z-z_0}.$$

注意到上式右端在整个区域 Ω 中为 z 的解析函数，按上式补充定义 $\frac{f(z,z_0)}{z-z_0}$ 在 $z=z_0$ 之值后，$\frac{f(z,z_0)}{z-z_0}$ 也是一个在 Ω 中的解析函数. 当 $z\neq z_0$ 时，$f(z,z_0)\neq 0$，从而 $\frac{f(z,z_0)}{z-z_0}\neq 0$；而当 $z=z_0$ 时，由(3.24)式

$$\left.\frac{f(z,z_0)}{z-z_0}\right|_{z=z_0}=f_z(z,z_0)\Big|_{z=z_0}\neq 0.$$

因此解析函数 $\frac{f(z,z_0)}{z-z_0}$ 在 Ω 中恒不为零，从而

$$\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{f(z,z_0)}{z-z_0}\right|=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\ln\frac{f(z,z_0)}{z-z_0}\right)$$

是 x,y 的调和函数. (ii)得证.

现在我们来验证，当 Ω 本身是一个圆时，利用(3.25)式将给出与(3.13)式完全一致的结果. 事实上，设 Ω 为以 R 为半径、原点为圆心的圆域，z_0 为 Ω 中的任一点，将 Ω 变为单位圆内部并将 z_0 变为原点的共形映照已知为

$$w=Re^{ia}\frac{z-z_0}{R^2-\bar{z}_0z},$$

其中 a 为任意实数. 由(3.25)式，格林函数为

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{R^2-z_0z}{R(z-z_0)}\right|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-z_0|}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{|R^2-z_0z|},$$

经过简单的计算可知上式与(3.13)式一致.

习 题

1. 试求单位圆外部区域上的格林函数，并导出相应的狄利克雷外问题的解的表达式.

2. 试用静电源象法求半圆形区域$\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1,\ y>0\}$上的狄利克雷问题的格林函数.

3. 试用共形映照的办法求题2半圆形区域上狄利克雷问题的格林函数.

4. 求单位球内的调和函数，使其在单位球面$r=1$上取值为$2\cos 2\theta+1$，这儿(r,θ,ψ)表示球坐标.

5. 求在以原点为心、a为半径的圆中为调和，而在圆周C上取下列值的函数：

(1) $u|_C=A\cos\theta$;

(2) $u|_C=A+B\sin\theta$,

其中A及B为常数，θ为极角.

6. S_R为以原点为圆心、R为半径的圆周，$(x,y)\in S_R$，试用直接计算验证

$$u=\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2}=\frac{R^2-x_0^2-y_0^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

关于变量(x_0,y_0)在S_R的内部调和.

7. 设φ为连续函数，且

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty}\varphi(x,y)=0,$$

验证上半空间调和方程狄利克雷问题的表达式(3.16).

8. 设区域Ω整个包含在以原点O为中心、R为半径的球K的外部，$u(r,\theta,\varphi)$是此区域中的调和函数，其中(r,θ,φ)表示Ω中变点M的球坐标. 设$r_1=\dfrac{R^2}{r}$，则点$M_1=(r_1,\theta,\varphi)$就是点M关于球K的反演点，从$M(r,\theta,\varphi)$到$M_1(r_1,\theta,\varphi)$的变换称为逆矢径变换或反演变换. 以Ω_1表示Ω的反演区域，试证明函数

$$v(r_1, \theta, \varphi)=\frac{R}{r_1}u\left(\frac{R^2}{r_1}, \theta, \varphi\right)$$

是区域 Ω_1 中的调和函数($r_1=0$ 的点除外). 函数 $v(r_1, \theta, \varphi)$ 称为函数 $u(r, \theta, \varphi)$ 的凯尔文(Kelvin)变换.

§4 调和函数的性质

调和函数是一种具有很好性质的函数，除了前面已经介绍过的平均值定理及极值原理等以外，这里再以二维情形为例介绍调和函数的另外一些重要性质，其它维数的情形是完全类似的.

引理 4.1 设 u 为区域 Ω 中的连续函数. 若对任何完全包含在 Ω 中的圆 C(其圆心记为 $M^*(x^*, y^*)$，半径记为 R)，恒成立

$$u(x_0, y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2}\times u(x^*+R\cos\theta, y^*+R\sin\theta)d\theta, \tag{4.1}$$

其中 $M_0(x_0, y_0)$ 为圆内任一点，$\rho_0=r_{M^*M_0}$，θ_0 为 $\overrightarrow{M^*M_0}$ 与 x 轴的夹角，则 u 必在 Ω 中调和；反之亦然.

证明 由圆的泊松公式(3.17)，在(4.1)式成立时，u 在圆 C 内部之值恰等于以 u 在圆周上的值为边值所求得的调和方程狄利克雷问题的解，因此 u 在 C 内为调和. 由 C 的任意性，u 在 Ω 中为调和.

反之，若 u 在 Ω 中为调和，则由狄利克雷问题解的唯一性，u 在圆 C 内部之值必等于以 u 在圆周上之值为边值所求得的调和方程狄利克雷问题的解. 于是，由圆的泊松公式(3.17)，易知(4.1)式成立. 引理证毕.

定理 4.1 (哈那克 (Harnack) 第一定理) 设 Ω 为有界区域，其边界为 Γ. 如果函数序列 $\{u_k\}$ 中的每个函数 u_k 都在 Ω 中调和，在 $\overline{\Omega}$ 上连续，而且这函数序列在 Γ 上一致收敛，则它在 $\overline{\Omega}$ 上也一致收敛，并且其极限函数 u 也在 Ω 中调和，在 $\overline{\Omega}$ 上连续.

证明 记

$$u_k|_\Gamma=f_k.$$

按定理假设，$\{f_k\}$ 在 Γ 上一致收敛，故对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在

N, 使当 $n, m\geqslant N$ 时, 在 Γ 上处处成立 $|f_n-f_m|\leqslant\varepsilon$, 从而由极值原理, 在 $\overline{\Omega}$ 上也有 $|u_n-u_m|\leqslant\varepsilon$. 于是, 由一致收敛性的柯西判别法. $\{u_k\}$在 $\overline{\Omega}$ 上也一致收敛, 其极限函数 u 当然是 $\overline{\Omega}$ 上的连续函数.

现在我们证明 u 在 Ω 中调和. 为此, 由引理 4.1, 只需证明对 Ω 中的任一点 $M^*(x^*, y^*)$, u 在以 M^* 为圆心、R 为半径并完全含在 Ω 中的圆 $C_R(M^*)$ 上成立(4.1)式. 由于 u_k 为调和函数, 对于此圆内任意一点 $M_0(x_0, y_0)$, 由引理 4.1 知

$$u_k(x_0, y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2}\times u_k(x^*+R\cos\theta, y^*+R\sin\theta)d\theta,$$

其中 $\rho_0=r_{M^*M_0}$, θ_0 为 $\overrightarrow{M^*M_0}$ 和 x 轴的夹角.

在上式中令 $k\to\infty$ 取极限, 由一致收敛性并利用(3.20)式, 就得到(4.1)式. 定理证毕.

引理 4.2　设 $C_R(M^*)$ 为以 M^* 为圆心、R 为半径的圆. $\{u_k\}$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$为在 $C_R(M^*)$ 中单调不减的调和函数序列. 如果$\lim\limits_{k\to\infty}u_k(M^*)$存在, 则$\{u_k\}$在 $C_R(M^*)$ 中处处收敛于一个调和函数 u, 并且对任意正数 $\rho<R$, 这种收敛在 $C_\rho(M^*)$ 上是一致的.

证明　不妨设 M^* 为坐标原点. 令

$$v_k=u_k-u_{k-1}\quad(k=1, 2, \cdots),$$

则 $v_k\geqslant 0$, 并且在 C_R 内调和. 设(x_0, y_0)为 C_ρ 中的任意一点, 而 $\rho<R$. 以(ρ_0, θ_0)表示点(x_0, y_0)的极坐标, 由(4.1)式, 有

$$v_k(x_0, y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2}\times v_k(R\cos\theta, R\sin\theta)d\theta.$$

注意到

$$(R-\rho_0)^2\leqslant R^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2\leqslant(R+\rho_0)^2,$$

利用 $v_k\geqslant 0$, 就得到

$$\frac{R-\rho_0}{R+\rho_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v_k(R\cos\theta, R\sin\theta)d\theta$$

$$\leqslant v_k(x_0, y_0) \leqslant \frac{R+\rho_0}{R-\rho_0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_k(R\cos\theta, R\sin\theta)d\theta.$$

再利用平均值定理，就得到

$$\frac{R-\rho_0}{R+\rho_0}v_k(0, 0) \leqslant v_k(x_0, y_0) \leqslant \frac{R+\rho_0}{R-\rho_0}v_k(0, 0). \qquad (4.2)$$

由于 $u_n - u_m = \sum_{k=m+1}^{n} v_k$，由上式及 $\{u_k(0, 0)\}$ 的收敛性立刻得到 $\{u_k(x_0, y_0)\}$ 在 C_ρ 中的一致收敛性. 再由哈那克第一定理及 ρ 的任意性即得所需要的结论. 引理证毕.

定理 4.2(哈那克第二定理) 区域 Ω 上的一个单调不减的调和函数序列，如果在一内点收敛，则在 Ω 内处处收敛于一个调和函数，并且这种收敛在 Ω 的任意有界内闭区域上是一致的（内闭一致收敛）.

证明 设 $\{u_k\}$ 为 Ω 上的单调不减调和函数序列，它在一点 $M_0 \in \Omega$ 收敛. 任取 $M \in \Omega$，如证明极值原理那样，将 M_0、M 两点用完全落在 Ω 中的折线 γ 连接，再用有限个在 Ω 中的圆覆盖 γ，然后一个圆接一个圆地依次利用引理 4.2，就可推得 $\{u_k\}$ 在 M 点收敛于一个调和函数 u，从而 $\{u_k\}$ 在 Ω 内处处收敛于调和函数 u.

设 F 为 Ω 中的任一有界闭集，由有限覆盖定理，存在有限个完全落在 Ω 中的开圆 C_i 覆盖 F. 因 F 为闭的，所以还可以将每个圆 C_i 的半径稍许缩小一点，使得到的有限个闭圆 $\overline{K}_i$ 同样覆盖 F. 因 $\{u_k\}$ 在 Ω 中处处收敛，特别在 K_i 的圆心 M_i 收敛. 由引理 4.2，$\{u_k\}$ 在 K_i 上一致收敛，从而在 F 上一致收敛. 定理证毕.

定理 4.3(解析性定理) 区域 Ω 中的调和函数 $u(M_0)$ 一定是解析函数，即对任何 $M^*(x^*, y^*) \in \Omega$，$u(M_0)$ 必可在 M^* 点近旁展开为 $(x_0 - x^*, y_0 - y^*)$ 的收敛的幂级数.

证明 二维调和函数作为单复变解析函数的实部，这一点是显然的. 这里给出一个利用圆的泊松公式来证明的方法，它在高维情形同样适用.

不妨设 M^* 为坐标原点 O，以 O 为心、R 为半径作圆 C_R（其圆周记为 S_R），使 C_R 完全含在 Ω 中. 对圆 C_R 内的任一点 M_0，由圆

的泊松公式，有

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2}\times u(R\cos\theta,\ R\sin\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi R}\int_{S_R}\frac{R^2-\rho_0^2}{r_{M_0M}^2}u(M)dS_M, \tag{4.3}$$

其中 $\rho_0^2=r_{OM_0}^2=x_0^2+y_0^2$，$\theta$ 为 $\overrightarrow{OM}$ 和 x 轴的夹角，θ_0 为 $\overrightarrow{OM_0}$ 和 x 轴的夹角.

上面积分中的核函数为

$$\frac{R^2-\rho_0^2}{r_{M_0M}^2}=\frac{R^2-(x_0^2+y_0^2)}{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2}.$$

我们要证明，它在原点的近旁可展开为 $(x_0,\ y_0)$ 的收敛的幂级数，且此幂级数对 $(x,\ y)\in S_R$ 为一致收敛. 事实上，此核函数的分母可写为

$$x^2+y^2-2(x_0x+y_0y)+x_0^2+y_0^2=R^2[1+X]$$

的形式，其中 $X=-\dfrac{2(x_0x+y_0y)-x_0^2-y_0^2}{R^2}$.

对 $(x,\ y)\in S_R$，当 $(x_0,\ y_0)$ 在原点近傍时，可使

$$|X|\leqslant\alpha<1.$$

注意到 $(1+X)^{-1}$ 在 $|X|\leqslant\alpha<1$ 可展开成 X 的一致收敛的幂级数，就立刻得到所要求的结论.

再利用逐项积分，由 (4.3) 式就可得到 $u(M_0)$ 必可在原点近傍展开为 $(x_0,\ y_0)$ 的收敛的幂级数. 定理证毕.

定理 4.4（刘维尔（Liouville）定理） 在全平面上为调和的函数如果有上界或下界，则它必定是常数.

证明 设 u 为全平面上的调和函数，且 $u\geqslant A$. 不妨设 $A=0$，即设 $u\geqslant 0$，因为否则可取 $u-A$ 代替 u 来进行讨论.

设 M_0 为平面上任意一点，令 $R>r_{OM_0}=\rho_0$，由 (4.1) 式有

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2}\times u(R\cos\theta,\ R\sin\theta)d\theta,$$

其中 θ_0 为 $\overrightarrow{OM_0}$ 和 x 轴的夹角. 因为 $u\geqslant0$, 与引理 4.2 的证明类似(见(4.2)式), 有

$$\frac{R-\rho_0}{R+\rho_0}u(0)\leqslant u(M_0)\leqslant\frac{R+\rho_0}{R-\rho_0}u(0),$$

在上式中令 $R\to\infty$, 得

$$u(M_0)=u(0),$$

于是由 M_0 的任意性知 u 在全平面上为一常数. 定理证毕.

定理 4.5(可去奇点定理) 设函数 $u(x,y)$ 在点 M_0 的一个邻域中除 M_0 外都是调和的, 如果在 M_0 的近旁成立

$$u(M)=O(1)\cdot\ln\frac{1}{r_{M_0M}},\tag{4.4}$$

则 (如果必要) 可以重新定义 u 在 M_0 点的数值, 使 u 在 M_0 点的整个邻域中(包括 M_0 点在内)为调和.

证明 以 M_0 为圆心、ρ 为半径作圆 C_ρ, 使其整个落在所述的邻域中. 记 C_ρ 的边界为 S_ρ, 求解下述的狄利克雷问题:

$$\begin{cases}\Delta v=0,\\ v|_{S_\rho}=u|_{S_\rho}.\end{cases}$$

由 §3 中的结果, 此问题的解 v 是存在的. 如果能证明在 C_ρ 中除 M_0 点以外成立 $u\equiv v$, 那么令 $u(M_0)=v(M_0)$ 即得所要求的结论.

任取 $M^*\in C_\rho$, $M^*\neq M_0$, 我们只要证明对任意给定的正数 ε, 成立

$$|u(M^*)-v(M^*)|\leqslant\varepsilon\ln\frac{\rho}{r_{M_0M^*}}.\tag{4.5}$$

为此, 考虑函数

$$w_{1,2}(M)=\varepsilon\ln\frac{\rho}{r_{M_0M}}\pm(u(M)-v(M)),$$

只要证明

$$w_{1,2}(M^*)\geqslant0.\tag{4.6}$$

利用(4.4)式, 并注意到 v 为有界函数, 可取 $\eta>0$ 充分小使 $\eta<r_{M_0M^*}$, 且成立

$$|u|\,|_{S_\eta}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\ln\frac{1}{\eta}$$

及
$$\varepsilon\ln\frac{\rho}{\sqrt{\eta}}\pm v|_{S_\eta}\geqslant 0,$$
其中 S_η 为以 M_0 为圆心、η 为半径的圆周．在 S_η 与 S_ρ 所夹的区域 G_η 中，$w_{1,2}$ 作为变量 M 的函数，满足
$$\begin{cases}\Delta w_{1,2}=0,\\ w_{1,2}|_{S_\rho}=0,\\ w_{1,2}|_{S_\eta}=\varepsilon\ln\dfrac{\rho}{\eta}\pm(u-v)|_{S_\eta}\\ \qquad=\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\ln\dfrac{1}{\eta}\pm u\right)\Big|_{S_\eta}+\left(\varepsilon\ln\dfrac{\rho}{\sqrt{\eta}}\mp v\right)\Big|_{S_\eta}\geqslant 0.\end{cases}$$
故由极值原理得在 G_η 中
$$w_{1,2}\geqslant 0,$$
特别就得到(4.6)式．定理证毕．

定理4.6　设区域 Ω 的边界 Γ 适当光滑，u 在 Ω 中调和，在 $\overline{\Omega}$ 上连续且不恒等于常数．设 u 在边界点 M_0 达到其在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值，且 u 在 M_0 点的外法向导数存在，则必成立
$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{M_0}>0,$$
其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Γ 上的单位外法线方向．类似地，在达到最小值的边界点，u 的外法向导数必小于零．

证明　过 M_0 点作一半径为 R 的圆 C_R，使其圆周 S_R 与 Γ 在 M_0 点相切，且 C_R 的内部全落在 Ω 中．由极值原理，u 在 C_R 中的值应严格小于 $u(M_0)$．

设 C_R 之圆心为 M^*，我们设法在 S_R 与 $S_{\frac{R}{2}}$ 所夹的圆环域 G 中求满足下面条件的函数 v：

(1) 在 G 内 $\Delta v<0$.

(2) $v\in C^0(\overline{G})$，且在 S_R 上 $v=0$.

(3) v 在 M_0 点的径向导数 $\dfrac{\partial v}{\partial r}$ 大于零．

如果这样的 v 存在，那么选取充分小的正数 ε，可使函数 $w=u-\varepsilon v$ 满足

$$w(M)|_{S_R} \leqslant w(M_0), \tag{4.7}$$

$$w(M)|_{S_{\frac{R}{2}}} < w(M_0). \tag{4.8}$$

事实上，显然有

$$w(M)|_{S_R} = u|_{S_R} \leqslant u(M_0) = w(M_0),$$

这就是(4.7)式．另一方面，因为在 $S_{\frac{R}{2}}$ 上 $u(M) < u(M_0)$，故

$$\max_{M \in S_{\frac{R}{2}}} u(M) < u(M_0).$$

于是若记 $\delta = u(M_0) - \max\limits_{M \in S_{\frac{R}{2}}} u(M)$，$A = \max\limits_{M \in G} |v(M)|$，

则当 $\varepsilon < \dfrac{\delta}{A}$ 时就有

$$w(M)|_{S_{\frac{R}{2}}} \leqslant \max_{M \in S_{\frac{R}{2}}} u(M) - \varepsilon v(M)$$

$$= u(M_0) - (\delta + \varepsilon v(M)) < u(M_0) = w(M_0),$$

则成立(4.8)式．

由(4.7)及(4.8)两式，$w(M_0)$ 是 w 在 G 的边界上的最大值．再注意到 $\Delta w = \Delta u - \varepsilon \Delta v = -\varepsilon \Delta v > 0$，$w$ 在 G 的内部不可能取到最大值，于是 $w(M_0)$ 也是 w 在 G 上的最大值，所以成立

$$\frac{\partial w(M_0)}{\partial n} \geqslant 0.$$

从而

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial n} \geqslant \varepsilon \frac{\partial v(M_0)}{\partial n} = \varepsilon \frac{\partial v(M_0)}{\partial r} > 0,$$

这就得到定理所要求的结论．

现在来说明满足条件(1)、(2)、(3)的函数 v 是存在的．事实上，若取

$$v = v(r) = \frac{1}{R} - \left(\frac{4}{5}\frac{1}{r_{M^*M}} + \frac{r_{M^*M}^2}{5R^3}\right),$$

则不难验证条件(1)、(2)、(3)满足．定理证毕．

系 4.1 由定理 4.6 可以立刻得到泊松方程的诺伊曼内问题的解在相差一个任意常数的意义下的唯一性．这是因为相应的齐次问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

的解只能恒等于常数，否则 u 在边界上取到最大值的点处其外法向导数应大于零，这与齐次边界条件 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0$ 矛盾.

习　　题

1. 证明三维空间中调和函数的可去奇点定理：设函数 $u(x, y, z)$ 在点 M_0 的一个邻域中除 M_0 外都是调和的，如果在 M_0 的近旁成立

$$r_{M_0M}\cdot u(M) = o(1),$$

则可以重新定义 u 在 M_0 点的数值，使 u 在 M_0 点的整个邻域中为调和.

2. 如果已知三维调和函数 $u(M)$ 在奇点 A 附近能表示为 $\dfrac{N(M)}{r_{AM}^{\alpha}}$ 的形式，其中常数 $\alpha\in(0, 1]$，$N(M)$ 是不为零的光滑函数，证明在 A 点函数 u 趋于无穷大的阶数必与 $\dfrac{1}{r_{AM}}$ 相同，即 $\alpha=1$.

3. 利用§3习题8中的凯尔文变换及习题1中的可去奇点定理，将三维调和方程的狄利克雷外问题化为狄利克雷内问题.

4. 对在三维空间的无界区域上的调和函数，证明如果它在无穷远处趋于零，那么其趋于零的阶数至少为 $O\left(\dfrac{1}{r}\right)$.

5. 设 $\{u_k\}$ 为在有界区域 Ω 中的一致有界的调和函数列，证明 u_k 的一阶偏导数在 Ω 中内闭一致有界.

6. 证明对在上题中的序列 $\{u_k\}$，可选取一个子序列，使其在 Ω 中内闭一致收敛.

§5　泊松方程

在§2.4中，我们曾利用格林公式导出了泊松方程的体位势形式的特解（形式解）．现在我们对二维的情形在 $f\in C^1(\overline{\Omega})$ 的假设下证明(2.17)式所给出的形式解

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega} f(\xi, \eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\,d\xi\,d\eta \tag{5.1}$$

确实是二维泊松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x, y) \tag{5.2}$$

的一个特解，其中 Ω 为有界区域.

引理 5.1 设 f 在 $\overline{\Omega}$ 上有界，则由 (5.1) 式所表示的函数 $v(x, y)$ 在全平面上一阶连续可微，并且成立

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)&=\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \frac{x-\xi}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}f(\xi, \eta)d\xi\, d\eta,\\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)&=\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \frac{y-\eta}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}f(\xi, \eta)d\xi\, d\eta.\end{aligned} \tag{5.3}$$

证明 (5.1) 式右边积分中的被积函数在 $M(\xi, \eta)=M_0(x, y)$ 时具有奇性，因此积分是含参变量 x 及 y 的广义积分. 为了避免由于被积函数的奇性所带来的困难，对任意给定的 $\varepsilon>0$，令

$$g_\varepsilon(M, M_0)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r_{M_0M}}, & r_{M_0M}\geqslant\varepsilon,\\ -\dfrac{1}{2\pi}\ln(a+br^2_{M_0M}), & r_{M_0M}<\varepsilon,\end{cases} \tag{5.4}$$

其中 $a=\dfrac{3}{2\varepsilon}$, $b=-\dfrac{1}{2\varepsilon^3}$. 容易证明，$g_\varepsilon\in C^1(\Omega\times R^2)$.

记

$$v_\varepsilon(x, y)=\iint_\Omega g_\varepsilon(\xi, \eta; x, y)f(\xi, \eta)d\xi\, d\eta. \tag{5.5}$$

易见 $v_\varepsilon(x, y)$ 在全平面上一阶连续可微，且成立

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}(x, y)&=\iint_\Omega \frac{\partial g_\varepsilon(\xi, \eta; x, y)}{\partial x}f(\xi, \eta)d\xi\, d\eta,\\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}(x, y)&=\iint_\Omega \frac{\partial g_\varepsilon(\xi, \eta; x, y)}{\partial y}f(\xi, \eta)d\xi\, d\eta.\end{aligned} \tag{5.6}$$

现在我们只要证明，在 $\varepsilon\to 0$ 时，v_ε、$\dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}$ 在 (x, y) 平面上分别一致收敛于(5.1)及(5.3)右边所示的积分.

记 $F=\sup\limits_\Omega|f|$，我们有

$$\left|\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}(x, y)-\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \frac{x-\xi}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}f(\xi, \eta)d\xi\, d\eta\right|$$

$$\leqslant \frac{F}{2\pi}\iint_{\substack{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2<\varepsilon^2\\(\xi,\eta)\in\Omega}}\left\{\frac{|x-\xi|}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{2|b(x-\xi)|}{a+b[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]}\right\}d\xi\, d\eta=I_1+I_2.$$

由于
$$\frac{|x-\xi|}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}},$$
我们有

$$I_1\leqslant\frac{F}{2\pi}\iint_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2<\varepsilon^2}\frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}$$

$$=\frac{F}{2\pi}\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}r\,dr\,d\theta=F\varepsilon.$$

又由 a 及 b 的定义，在 $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant\varepsilon^2$ 时，易知有

$$\frac{2|b(x-\xi)|}{a+b[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]}\leqslant\frac{1}{\varepsilon},$$

于是
$$I_2\leqslant\frac{F}{2\pi}\frac{1}{\varepsilon}\iint_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2<\varepsilon^2}d\xi\, d\eta\leqslant\frac{F}{2}\varepsilon.$$

这样，我们有

$$\left|\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}(x, y)-\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega\frac{x-\xi}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}f(\xi, \eta)d\xi\, d\eta\right|$$

$$\leqslant 2F\varepsilon.$$

同理有

$$\left|\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}(x, y)-\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega\frac{y-\eta}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}f(\xi, \eta)d\xi\, d\eta\right|$$

$$\leqslant 2F\varepsilon.$$

这就证明了在 $\varepsilon\to 0$ 时 $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}(x, y)$ 及 $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}(x, y)$ 在全平面上的一致收敛性．用类似的方法可以证明 $v_\varepsilon(x, y)$ 在全平面上一致收敛于 $v(x, y)$．引理证毕．

引理 5.2 设 f 在 $\overline{\Omega}$ 上一阶连续可微，则由(5.1)式所表示的

函数 $v(x, y)$ 在全平面上除去 Ω 的边界 Γ 外二阶连续可微，记为 $v\in C^2(R^2\backslash\Gamma)$.

证明 任取 $M^*(x^*, y^*)\in\Omega$，以 M^* 为心、ρ 为半径作圆 $C_\rho(M^*)\subset\Omega$. 对 $M_0(x, y)\in C_\rho(M^*)$，有

$$
\begin{aligned}
v(x, y) &= -\frac{1}{2\pi}\iint_{C_\rho(M^*)} f(\xi, \eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\,d\xi\,d\eta \\
&\quad -\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega\backslash C_\rho(M^*)} f(\xi, \eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\,d\xi\,d\eta \\
&= v_1(x, y)+v_2(x, y).
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

因有关的积分无奇性，且积分的核为基本解，易见 $v_2(x, y)$ 在 $M_0=M^*$ 点二阶连续可微，并且满足

$$
\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}=0. \tag{5.8}
$$

由引理 5.1,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\iint_{C_\rho(M^*)} f(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\right)d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi}\iint_{C_\rho(M^*)} f(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\right)d\xi\,d\eta.
\end{aligned}
$$

于是，注意到 f 在 $\overline{\Omega}$ 上一阶连续可微，并利用在 § 2.3 中推导基本积分公式的类似方法（即先挖去一个以 $M_0(x, y)$ 为中心的小圆，利用格林公式，再令小圆的半径趋向于零），可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi}\int_{S_\rho(M^*)} f(\xi, \eta)\cos(\boldsymbol{n}, \xi) \\
&\qquad \times\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\,dS \\
&\qquad -\frac{1}{2\pi}\iint_{C_\rho(M^*)} f_\xi(\xi, \eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}d\xi d\eta \\
&= w_1(x, y)+w_2(x, y),
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

于此 $S_\rho(M^*)$ 为 $C_\rho(M^*)$ 的圆周，$\boldsymbol{n}$ 为其上的单位外法线向量．显然 $w_1(x, y)$ 在 M^* 点一阶连续可微；又根据引理 5.1，$w_2(x, y)$ 在全平面一阶连续可微，特别在 M^* 点也一阶连续可微．

这样，我们得到 $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 在 M^* 点一阶连续可微，同理 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 也如此．因此 v 在 M^* 点二阶连续可微．由 M^* 的任意性得 $v\in C^2(\Omega)$．

若 $M_0(x, y)$ 在 Ω 的外部，由于此时积分(5.1)不具有奇性，因此 v 显然二阶连续可微．这样就得到 v 在 R^2 上除 Γ 以外处处二阶连续可微．引理证毕．

定理 5.1 设 f 在 $\overline{\Omega}$ 上一阶连续可微，则由(5.1)式所表示的函数 $v(x, y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\begin{cases}0, & (x, y)\notin\overline{\Omega},\\ f(x, y), & (x, y)\in\Omega.\end{cases}\tag{5.10}$$

证明 由基本解的表示式，$v(x, y)$ 在 Ω 外部满足调和方程是显然的，我们仅需证明它在 Ω 中满足相应的泊松方程．

任取 $M^*(x^*, y^*)\in\Omega$，仅需证明 $v(x, y)$ 在 M^* 点满足泊松方程(5.2)．由引理 5.2 的证明知(见(5.7)，(5.8)式)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2},\tag{5.11}$$

而

$$v_1(x, y)=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_\rho(M^*)} f(\xi, \eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\,d\xi\,d\eta.$$

由(5.9)式

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}=\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial x}=&-\frac{1}{2\pi}\int_{S_\rho(M^*)}\frac{f(\xi, \eta)\cos(\boldsymbol{n}, \xi)}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}(x-\xi)dS\\&+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_\rho(M^*)}\frac{f_\xi(\xi, \eta)(x-\xi)}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\,d\xi\,d\eta,\end{aligned}$$

同理

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}=-\frac{1}{2\pi}\int_{S_\rho(M^*)}\frac{f(\xi, \eta)\cos(\boldsymbol{n}, \eta)}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}(y-\eta)dS$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint_{C_\rho(M^*)}\frac{f_\eta(\xi,\eta)(y-\eta)}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\,d\xi\,d\eta,$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}=&-\frac{1}{2\pi}\int_{S_\rho(M^*)}\frac{f(\xi,\eta)}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\Big\{\cos(\boldsymbol{n},\xi)\\&\times\frac{x-\xi}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}+\cos(\boldsymbol{n},\eta)\\&\times\frac{y-\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\Big\}dS\\&+\frac{1}{2\pi}\iint_{C_\rho(M^*)}\frac{f_\xi(\xi,\eta)(x-\xi)+f_\eta(\xi,\eta)(y-\eta)}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}d\xi\,d\eta.\end{aligned}\tag{5.12}$$

在上式中特取 $M_0=M^*$, 并注意到(5.11)式, 可得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\Big|_{(x,y)=(x^*,y^*)}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{S_\rho(M^*)}\frac{f(\xi,\eta)}{\sqrt{(\xi-x^*)^2+(\eta-y^*)^2}}\,dS\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\iint_{C_\rho(M^*)}\frac{f_\xi(\xi,\eta)(x^*-\xi)+f_\eta(\xi,\eta)(y^*-\eta)}{(\xi-x^*)^2+(\eta-y^*)^2}\,d\xi\,d\eta.\end{aligned}\tag{5.13}$$

注意到 (5.13) 的左边与 ρ 无关, 而在(5.13)的右边令 $\rho\to0$, 易知第二项的极限为零, 而第一项

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{S_\rho(M^*)}\frac{f(\xi,\eta)}{(\xi-x^*)^2+(\eta-y^*)^2}\,dS\\&=\frac{1}{2\pi\rho}\int_{S_\rho(M^*)}f(\xi,\eta)\,dS\to f(x^*,y^*)\quad(\rho\to0),\end{aligned}$$

故得 $v(x,y)$ 在点 $M^*(x^*,y^*)$ 满足泊松方程(5.2). 定理证毕.

习　　题

1. 验证三维体位势

$$u=-\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

是三维泊松方程

$$\Delta u = f$$

的一个特解，其中 f 为有界区域 $\bar{\Omega}$ 上的一阶连续可微函数。

2. 求解二维泊松方程的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u = Axy, \ x^2+y^2 \leqslant a^2 \quad (A \text{ 为常数}), \\ u=0, \ x^2+y^2=a^2. \end{cases}$$

3. 设半径为 R 的带电球体 K 的球心坐标为 $(0, 0, a)$，球上的电荷体密度为常数 ρ_0，试求 K 所产生的静电势在平面 $z=0$ 上的值。

4. 设空间维数为 3，求球对称的电荷密度分布 $\rho(r)$（设当 $r \geqslant r_0 (>0)$ 时 $\rho(r)=0$）所产生的体位势。特别当

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & \text{当 } 0<r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \ (\rho_0 \text{ 为常数}) \\ 0, & \text{当 } r \notin [r_1, r_2] \end{cases}$$

时，试求出相应的体位势。

第五章

二阶线性偏微分方程

在前面几章中，我们详细讨论了热传导方程、波动方程和调和方程．这三类方程虽然形状特殊，但是在二阶线性偏微分方程中，却是三个典型的代表，其基本性质及求解方法都可相应地推广到一般的二阶抛物型、双曲型与椭圆型方程．在本章中，我们将对前面介绍的一些求解方法作进一步的说明，并对这三类方程的性质进行比较深入的总结和讨论．

§1 分离变量法的理论基础

1.1 方法的回顾

在求解热传导方程与波动方程的混合问题时，我们已经看到分离变量法是一个有效的方法．分离变量法也可以用于求解调和方程在一些特殊区域中的边值问题．然而，这种求解方法为什么是可行的？这是我们深入理解这一方法，并进一步利用它来处理更一般的问题时必须弄清楚的．

首先以热传导方程为例，简略地回顾一下用分离变量法求解混合问题的过程．在第二章中我们讨论了问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=Lu, \\ x=0 \text{ 及 } x=l:\ u=0, \\ t=0:\ u=\varphi(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 L 表示微分算子 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$．将问题(1.1)的解 u 写成如下的级数形式

$$u(x,\ t)=\sum_i T_i(t)X_i(x), \tag{1.2}$$

其中每一项都是分离变量的形式 $T_i(t)X_i(x)$，要求它满足(1.1)中的偏微分方程:

$$T_i'(t)X_i(x)=T_i(t)LX_i(x), \tag{1.3}$$

且满足(1.1)中的齐次边界条件:

$$X_i(0)=X_i(l)=0. \tag{1.4}$$

又要求整个级数(1.2)(形式地)满足(1.1)中的初始条件:

$$\sum_i T_i(0)X_i(x)=\varphi(x). \tag{1.5}$$

这样，如果能证明级数(1.2)收敛，而且可以逐项求导两次，则由(1.2)所给出的函数 $u(x, t)$ 就是问题(1.1)的解.

由(1.3)可得，$\dfrac{T_i'(t)}{T_i(t)}$ 与 $\dfrac{LX_i(x)}{X_i(x)}$ 都不依赖于自变量 t 与 x，即为常数. 于是，为了能够由分离变量法求得(1.1)的级数形式的解，首先应该成立如下的事实:

(i) 可以找到可列个实数 $\lambda_i(i=1, 2, \cdots)$，使边值问题

$$\begin{cases} LX_i=\lambda_i X_i, \\ X_i(0)=X_i(l)=0 \end{cases} \tag{1.6}$$

有非平凡解 $X_i(x)$.

(ii) 函数 $\varphi(x)$ 可以关于函数系 $\{X_i(t)\}$ 展开成函数项级数

$$\varphi(x)=\sum \varphi_i X_i(x). \tag{1.7}$$

对于热传导方程的混合问题(1.1)来说，上述两点均能成立. 因为此时(1.6)为

$$\begin{cases} X_i''=\lambda_i X_i, \\ X_i(0)=X_i(l)=0, \end{cases} \tag{1.8}$$

于是，$\lambda_i=-\dfrac{i^2\pi^2}{l^2}(i=1, 2, \cdots)$，而相应的非平凡解为

$$X_i(x)=\sin\frac{i\pi x}{l}. \tag{1.9}$$

再由三角级数的理论知，$\left\{\sin\dfrac{i\pi x}{l}\right\}$在$[0, l]$上构成完备的正交函数系. 于是，只要 $\varphi(x)\in C^1[0, l]$，$\varphi(0)=\varphi(l)=0$，它就可表示

为形如(1.7)的级数，其中 φ_i 为相应的傅立叶系数.

当然，为了能利用分离变量法真正得到所讨论的定解问题的解，还需对已得到的级数形式的解进行验证. 这只需考察(1.2)式右端的级数是否可以逐项求导二次. 级数(1.2)可否逐项求导取决于函数 φ 的光滑程度以及关于 $T_i(t)$ 的常微分方程初值问题的解的性态. 对于热传导方程的上述混合问题. 注意到 $T_i(t)$ 应是下述初值问题的解:

$$\begin{cases} T_i'(t) = \lambda_i T_i(t), \\ T_i(0) = \varphi_i, \end{cases} \tag{1.10}$$

于是

$$T_i(t) = \varphi_i e^{-\frac{i^2\pi^2}{l^2}t}, \tag{1.11}$$

这里指数函数项在 $t>0$ 时是一个很强的收敛因子. 由于它的存在，对级数(1.2)的逐项求导在 $t>0$ 时就可以毫无困难地进行. 因此，正如第二章中已证明的，只需假设 $\varphi(x) \in C^1[0, l]$，$\varphi(0) = \varphi(l) = 0$，(1.2)式就给出热传导方程混合问题(1.1)的解. 而对于弦振动方程的混合问题来说，由于相应的 $T_i(t)$ 是一类三角函数，为保证级数形式解的收敛性，对于初值 $\varphi(x)$ 的光滑性就应提出较高的要求，这一点我们已在第三章中看到.

以下暂不考虑所得到的级数形式解的收敛性，而进一步对前述的条件(i)、(ii)进行分析.

1.2 特征值问题

上面提到的问题(1.6)称为**特征值问题**，或**斯图姆-刘维尔(Sturm-Liouville)问题**. 略去(1.6)中的下标 i，并将齐次边界条件记为 $BX=0$(它表示在 $x=0$ 与 $x=l$ 处应分别满足的两个边界条件)，则(1.6)可以写成如下的形式:

$$\begin{cases} LX = \lambda X, \\ BX = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

易知，$X=0$ 恒为上述问题的解，称为平凡解. 但是，上述问题是否有非平凡解存在，则与 λ 的取值有密切关系. 若对于某些特定

的 λ 值，(1.12)有非平凡解，则称这样的 λ 值为特征值(或固有值). 当 λ 取特征值时，(1.12)的非平凡解称为相应于此特征值的特征函数(或固有函数).

当我们将分离变量法用于多于两个自变量的偏微分方程问题时，还会遇到形如(1.12)的特征值问题，但其中 L 是在某个区域上给定的线性偏微分算子(一般是一个椭圆型算子)，$BX=0$ 表示 X 在区域边界上所满足的齐次边界条件，例如狄利克雷条件或诺伊曼条件等. 这样我们就得到了一个偏微分方程的特征值问题.

对特征值问题的研究不仅为分离变量法奠定了理论基础，而且它本身也有许多重要的应用，已构成数学物理方程中的一个独立的研究领域.

由特征值理论的研究知道，当算子 L 与 B 满足一定的条件时，以下四个定理成立.

定理 1.1　特征值问题(1.12)存在着无穷多个离散的特征值：

$$\lambda_1\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots,$$

且序列$\{\lambda_i\}$中落在实轴上任一有限区间上的特征值个数是有限的，故当 $i\to+\infty$ 时，$\lambda_i\to+\infty$.

定理 1.2　对应于每个特征值，其线性无关的特征函数只有有限个.

定理 1.3　对应于不同的特征值的特征函数正交(或带权正交).

定理 1.4　若 $\varphi(x)$ 为满足边界条件 $B\varphi=0$ 的函数，具有适当的连续可微性，则它可以按照标准正交(或带权正交)的特征函数系$\{X_i(x)\}$展开为平方平均收敛的级数

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i X_i(x).$$

显然，这四条定理包含了前段条件(i)与(ii)中所涉及的内容. 因此，我们称它们为分离变量法的理论基础. 确定算子 L 与 B 所应当满足的条件以及在这些条件下证明这四条定理成立，要用到泛函分析中全连续算子的理论，在此从略. 但可以指出，对于常见

的数学物理方程，在使用分离变量法时，有关的条件通常是能得到满足的.

1.3 圆形区域上的热传导问题

现在考察上、下底面为绝热的均匀圆板上的热传导问题. 我们将两次应用分离变量法来求解这个问题. 对这个问题的分析讨论可以帮助我们进一步理解与掌握分离变量法的思想与实质.

设圆形区域为 $x^2+y^2\leqslant a^2$，在其边界上圆板的温度为常数，则可以将上述问题归结为求解热传导方程的如下定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\ t=0:\ u=\varphi(x,\ y),\\ u\big|_{x^2+y^2=a^2}=0.\end{cases}\tag{1.13}$$

用分离变量法来求解. 先令

$$u(x,\ y,\ t)=T(t)V(x,\ y),\tag{1.14}$$

代入热传导方程并分离变量后，可得下面两个分别关于函数 $T(t)$ 和 $V(x,\ y)$ 的方程：

$$T'(t)+\lambda T(t)=0,\tag{1.15}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\lambda V=0,\tag{1.16}$$

其中 λ 为待定常数. 于是我们得到下述的特征值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\lambda V=0,\\ V\big|_{x^2+y^2=a^2}=0.\end{cases}\tag{1.17}$$

利用调和函数的极值原理，容易证明，在 $\lambda\leqslant 0$ 时，特征值问题(1.17)只有平凡解(证明留作习题)，因此下面只需考察 $\lambda>0$ 的情形.

为求解这个偏微分方程的特征值问题，注意到区域的特殊性，可再次应用分离变量法. 为此先采用极坐标，将 $V(x,\ y)$ 写成 $\tilde{V}(r,\ \theta)$ 的形式，然后再分离变量. (1.17)在极坐标下的形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\tilde{V}}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\tilde{V}}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\tilde{V}}{\partial\theta^2}+\lambda\tilde{V}=0,\\ \tilde{V}(r,\theta)|_{r=a}=0.\end{cases}\tag{1.18}$$

令

$$\tilde{V}(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta),\tag{1.19}$$

又可得到下述分别关于 $R(r)$ 及 $\Theta(\theta)$ 的两个方程:

$$\Theta''(\theta)+\mu\Theta(\theta)=0,\tag{1.20}$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-\mu)R(r)=0,\tag{1.21}$$

其中 μ 是待定常数. 由于 $\Theta(\theta)$ 应为 θ 的周期函数,周期为 2π,于是由(1.20)我们又得到一个特征值问题

$$\begin{cases}\Theta''(\theta)+\mu\Theta(\theta)=0,\\ \Theta(0)=\Theta(2\pi).\end{cases}\tag{1.22}$$

由此易知,其特征值为 $\mu=0,\ 1^2,\ 2^2,\ \cdots,\ n^2,\ \cdots$, 而相应的特征函数为

$$\Theta_0(\theta)=1,\ \Theta_n(\theta)=\cos n\theta\ 及\ \sin n\theta\quad(n=1,\ 2,\ \cdots),$$

它们构成一个完备的三角函数系.

现在将 $\mu=\mu_n=n^2$ 代入方程(1.21),得

$$r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-n^2)R(r)=0.\tag{1.23}$$

由(1.18)的第二式,应成立

$$R(a)=0;\tag{1.24}$$

同时由于 $r=0$ 是方程(1.23)的奇点,为避免在解中出现奇性,还应要求 $R(r)$ 在 $r=0$ 处有界.

因 $\lambda>0$, 在(1.23)中作自变数变换 $\rho=r\sqrt{\lambda}$, 并记 $\tilde{R}(\rho)=R(r)$, 就得到 n 阶贝塞尔(Bessel)方程

$$\rho^2\tilde{R}''(\rho)+\rho\tilde{R}'(\rho)+(\rho^2-n^2)\tilde{R}(\rho)=0.\tag{1.25}$$

这个方程有在原点 $\rho=0$ 处为有界的解,且除去一个常数因子外此解是唯一确定的,它就是第一类的贝塞尔函数 $J_n(\rho)$.

为满足边界条件(1.24),应有

$$J_n(a\sqrt{\lambda})=0,$$

即 $a\sqrt{\lambda}$ 应为 $J_n(\rho)$ 的零点. 已知贝塞尔函数 $J_n(\rho)$ 有无穷多个正根,分别记为

$$\mu_1^{(n)},\ \mu_2^{(n)},\ \cdots,\ \mu_m^{(n)},\ \cdots,$$

所以 λ 必须取值

$$\lambda=\lambda_{n,m}=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2. \tag{1.26}$$

这样，(1.17)或(1.18)对应于 $\lambda=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2$ 的解为

$$\tilde{V}(r,\ \theta)=(a_n^{(m)}\cos n\theta+b_n^{(m)}\sin n\theta)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}r\right), \tag{1.27}$$

其中 $a_n^{(m)}$ 及 $b_n^{(m)}$ 为待定常数. 又对此 λ 值，方程 (1.15) 的解易知为 $Ae^{-\lambda t}$ 的形式 (A 为任意常数)，于是原问题 (1.13) 的解可以表示为如下级数的形式：

$$u(x,\ y,\ t)=\tilde{u}(r,\ \theta,\ t)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2 t}(a_n^{(m)}\cos n\theta+b_n^{(m)}\sin n\theta)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}r\right), \tag{1.28}$$

其中的系数 $a_n^{(m)}$, $b_n^{(m)}$ 可以利用(1.13)中初始条件决定. 事实上，只要将初值 $\varphi(x,\ y)=\tilde{\varphi}(r,\ \theta)$ 展开成级数

$$\tilde{\varphi}(r,\ \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(\bar{\varphi}_n^{(m)}\cos n\theta+\bar{\bar{\varphi}}_n^{(m)}\sin n\theta)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}r\right), \tag{1.29}$$

并取(1.28)中的 $a_n^{(m)}$, $b_n^{(m)}$ 分别为 $\bar{\varphi}_n^{(m)}$, $\bar{\bar{\varphi}}_n^{(m)}$，就可以得到定解问题(1.13)的形式解 $u(x,\ y,\ t)$.

为了说明函数 $\tilde{\varphi}(r,\ \theta)$ 可以关于函数系

$$\cos n\theta\, J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}r\right),\ \sin n\theta\, J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}r\right)\quad\begin{pmatrix}n=0,\ 1,\ \cdots\\ m=1,\ 2,\ \cdots\end{pmatrix} \tag{1.30}$$

展开为级数，需要用到贝塞尔函数的专门知识，这里我们只引述有关的结果而不予证明. 由贝塞尔函数的性质知道，函数系 $\{J_n(\mu_m^{(n)}x)\}$ 在区间 $[0,\ 1]$ 上为平方可积的函数类中是完备的，此外，又知道三角函数系 $\{1,\ \cos n\theta,\ \sin n\theta\ (n=1,\ 2,\ \cdots)\}$ 在区间 $[0,\ 2\pi]$ 上为平方可积的函数类中是完备的，从而函数系(1.30)在

区域$[0, 1]\times[0, 2\pi]$上为平方可积的函数类中为完备的. 因此，只要$\tilde{\varphi}(r, \theta)$平方可积，就有展开式(1.29)，并由此可决定出$\overline{\varphi}_n^{(m)}$，$\overline{\overline{\varphi}}_n^{(m)}$之值.

贝塞尔函数的另一个重要性质是$J_n(\mu_m^{(n)}x)$在区间$[0, 1]$上是带权x正交的，即成立

$$\int_0^1 xJ_n(\mu_m^{(n)}x)J_n(\mu_{m'}^{(n)}x)dx=0 \quad (m\neq m').$$

于是若记

$$C_n^{(m)}=\int_0^1 xJ_n(\mu_m^{(n)}x)^2dx,$$

就有

$$\overline{\varphi}_n^{(m)}=\frac{1}{\pi a^2C_n^{(m)}}\int_0^{2\pi}\int_0^a J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}r\right)\cos n\theta\,\tilde{\varphi}(r, \theta)r\,dr\,d\theta \quad (n>0),$$

$$\overline{\overline{\varphi}}_n^{(m)}=\frac{1}{\pi a^2C_n^{(m)}}\int_0^{2\pi}\int_0^a J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}r\right)\sin n\theta\,\tilde{\varphi}(r, \theta)r\,dr\,d\theta \quad (n>0),$$

$$\overline{\varphi}_0^{(m)}=\frac{1}{2\pi a^2C_0^{(m)}}\int_0^{2\pi}\int_0^a J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{a}\right)\tilde{\varphi}(r, \theta)r\,dr\,d\theta,$$

利用它们就可以具体写出圆板上所考察的热传导问题的解(1.28).

由上面的分析知道，用分离变量法求解问题(1.13)导出贝塞尔方程，而问题能否得到最终解决也与贝塞尔函数的性质有密切的关系. 当我们用分离变量法求解其它的定解问题时（包括讨论不同的方程、不同的边界条件及在不同形状的区域上求解等），还会导致其它类型的特殊函数，而对于这些特殊函数性质的了解可帮助我们解出相应的定解问题. 事实上，许多重要的特殊函数正是由于用分离变量法求解数学物理问题的需要而引入和得到深入的研究的.

习　题

1. 利用分离变量法求解调和方程在圆上的狄利克雷问题，并由此得到二维情形下的泊松公式.

2. 求在三维空间的圆柱形区域：$x^2+y^2\leqslant R^2$, $|z|\leqslant a$上热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

满足边界条件

$$\begin{cases} u|_{x^2+y^2=R^2}=0, \\ u|_{z=\pm a}=0 \end{cases}$$

与初始条件 $t=0$: $u=\varphi(x^2+y^2, z)$

的解.

3. 在上一问题中将 $z=\pm a$ 处的边界条件改为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=\pm a}=0,$$

求相应的定解问题的解.

4. 在区间$[0, l]$上给定特征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right)-q(x)y(x)+\lambda\rho(x)y(x)=0, \\ y(0)=y(l)=0, \end{cases}$$

其中 $p(x)\geqslant p_0>0$, $\rho(x)\geqslant \rho_0>0$, $q(x)\geqslant 0$. 试证明其特征值必为正数, 且对应于不同特征值的特征函数带权 $\rho(x)$ 正交.

§2 能量积分法

2.1 双曲型方程的能量积分法

在偏微分方程理论中的另一个常用方法是能量积分法, 或简称能量方法. 在第二章及第三章中我们已分别利用这个方法证明了热传导方程混合问题的解的唯一性及波动方程定解问题解的唯一性与稳定性, 现在对这个方法作较为一般的讨论.

先考察双曲型方程的混合问题. 设 Ω 为 R^n 中的一个有界区域. 其边界 Γ 适当光滑, 以 Q 记以 $(x_1, \cdots, x_n, t)$ 为自变量的空间 R^{n+1} 中的柱形区域 $\Omega\times(0, T)$, 其侧面 $\Sigma=\Gamma\times(0, T)$. 在柱形区域 Q 中给出方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+C(x, t)u=f(x, t), \tag{2.1}$$

其中系数及右端项都是在 $\overline{Q}$ 上的连续函数, 而且 $a_{ij}(x, t)$ 还具有一阶连续偏导数, 并满足 $a_{ij}(x, t)=a_{ji}(x, t)$, 且对任意实向量

$(\xi_1, \cdots, \xi_n)$在$(x, t)\in\bar{Q}$上成立

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \quad (\alpha>0\text{常数}). \tag{2.2}$$

此时，方程(2.1)是高维波动方程的推广，由第一章§2.4中的定义，它在Q中是双曲型方程．现给出如下的初始条件与边界条件：

$$t=0: \ u=\varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}=\psi(x) \quad (x\in\Omega), \tag{2.3}$$

$$u|_{\Sigma}=0. \tag{2.4}$$

(2.1)、(2.3)及(2.4)就构成了双曲型方程的混合问题，它可以用能量积分法证明是适定的．

定理2.1 混合问题(2.1)、(2.3)及(2.4)的解如果存在，它一定是唯一的。

证明 为证明解的唯一性，只要证明当$f(t, x)\equiv 0$, $\varphi(x)\equiv 0$及$\psi(x)\equiv 0$时相应的混合问题只有零解．此时，以$\dfrac{\partial u}{\partial t}$乘(2.1)式，并在$\Omega\times(0,t_1)$上积分，得

$$\int_0^{t_1}\int_{\Omega}\Big(u_tu_{tt}-u_t\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}+u_t\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}+u_tcu\Big)dx\,dt=0. \tag{2.5}$$

我们有$u_tu_{tt}=\dfrac{1}{2}(u_t^2)_t$，又

$$u_ta_{ij}u_{x_ix_j}=(u_ta_{ij}u_{x_i})_{x_j}-u_{tx_j}a_{ij}u_{x_i}-u_t(a_{ij})_{x_j}u_{x_i}.$$

由于

$$\sum_{i,j=1}^{n} u_{tx_j}a_{ij}u_{x_i}=\sum_{i,j=1}^{n}(u_{x_j}a_{ij}u_{x_i})_t-\sum_{i,j=1}^{n}u_{x_j}(a_{ij})_tu_{x_i}$$
$$-\sum_{i,j=1}^{n}u_{x_j}a_{ij}u_{x_it},$$

利用系数a_{ij}的对称性，有

$$\sum_{i,j=1}^{n} u_{tx_j}a_{ij}u_{x_i}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}u_{x_i}u_{x_j})_t-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}u_{x_j}(a_{ij})_tu_{x_i},$$

从而

$$u_t\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j}=\sum_{i,j=1}^{n}\Big[(u_ta_{ij}u_{x_i})_{x_j}-u_t(a_{ij})_{x_j}u_{x_i}$$
$$-\frac{1}{2}(a_{ij}u_{x_i}u_{x_j})_t+\frac{1}{2}u_{x_j}(a_{ij})_tu_{x_i}\Big].$$

这样，(2.5)式可改写成

$$\int_0^{t_1}\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}(u_t^2)_t+\sum_{i,j=1}^n\left[\frac{1}{2}(a_{ij}u_{x_i}u_{x_j})_t-(a_{ij}u_{x_i}u_t)_{x_j}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}u_{x_j}(a_{ij})_t u_{x_i}+u_t(a_{ij})_{x_j}u_{x_i}\right]+u_t\sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}+u_t cu\right\}dx\,dt=0.$$

利用格林公式，将其中的前三项积分化为边界上的积分，就有

$$\int_\Omega\left[u_t^2+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\right]_{t=0}^{t=t_1}dx-\int_0^{t_1}\int_\Gamma 2(a_{ij}u_{x_i}u_t\cos(\boldsymbol{n},x_j)dS\,dt$$
$$+\int_0^{t_1}\int_\Omega p(u,u_t,u_x)dx\,dt=0,\tag{2.6}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Γ 上的单位外法线向量，它与 t 轴垂直；而 p 表示 $u, u_t, u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}$ 的二次形式，其系数都是给定的连续函数，因此有

$$|p(u,u_t,u_x)|\leqslant C\left(u^2+u_t^2+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right),\tag{2.7}$$

而 C 为一个与 u 无关的正常数.

由边界条件(2.4)，在侧边界 Σ 上也有 $u_t=0$，于是由(2.6)式得

$$\int_\Omega\left[u_t^2+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\right]_{t=0}^{t=t_1}dx+\int_0^{t_1}\int_\Omega p(u,u_t,u_x)dx\,dt=0.\tag{2.8}$$

为了估计 u 的值，利用在第三章§7中已经证明过的下述

引理 2.1 设 u 是在有界区域 $\Omega\subset R^n$ 上的连续可微函数，且在边界 Γ 上为零，则成立如下的弗里德里克斯(Friedrichs)不等式.

$$\int_\Omega u^2dx\leqslant C\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx,\tag{2.9}$$

其中 C 是一个与 u 无关的正常数.

由(2.7)及(2.9)，得

$$\int_\Omega|p(u,u_t,u_x)|dx\leqslant C_1\int_\Omega\left(u_t^2+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right)dx,$$

其中 C_1 是一个正常数．又利用条件(2.2)得

$$u_t^2+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j}\geqslant u_t^2+\alpha\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2$$

$$\geqslant \min(\alpha, 1)\left(u_t^2+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right).$$

于是,若记

$$E(t)=\int_\Omega\left[u_t^2(t, x)+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x)u_{x_i}(t, x)u_{x_j}(t, x)\right]dx, \tag{2.10}$$

则从(2.8)可得

$$E(t_1)-E(0)\leqslant C_1\int_0^{t_1}E(t)dt,$$

即

$$E(t_1)\leqslant E(0)+C_1\int_0^{t_1}E(t)dt. \tag{2.11}$$

引理 **2.2**(Gronwall 不等式) 若 $E(t)$ 满足

$$E(t)\leqslant E(0)+C\int_0^t E(\tau)d\tau,$$

则成立

$$E(t)\leqslant E(0)e^{Ct}.$$

证明 记

$$\varphi(t)=E(0)+C\int_0^t E(\tau)d\tau,$$

由引理条件有

$$E(t)\leqslant\varphi(t), \tag{2.12}$$

从而

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi(t)}{dt}=CE(t)\leqslant C\varphi(t), & (2.13)\\ \varphi(0)=E(0). & (2.14)\end{cases}$$

由(2.13)式,有

$$\frac{d}{dt}(e^{-Ct}\varphi(t))\leqslant 0,$$

将上式从 0 到 t 积分,利用(2.14)就得到

$$e^{-Ct}\varphi(t)\leqslant E(0),$$

即

$$\varphi(t)\leqslant E(0)e^{Ct}.$$

将此式代入(2.12),就证明了引理.

利用引理 2.2,由(2.11)式就得到

$$E(t) \leqslant E(0)e^{C_1 t}. \tag{2.15}$$

由于初始条件为零，$E(0)=0$. 于是由上式，$E(t)\equiv 0$. 这说明 $u_t\equiv u_{x_1}\equiv\cdots\equiv u_{x_n}\equiv 0$，所以 u 必为常数. 但 u 的初值已给定为零，故得 $u\equiv 0$，这就证明了解的唯一性. 定理 2.1 证毕.

在定理 2.1 的证明中由(2.10)式引入的用正定积分表达的函数 $E(t)$ 也称为能量积分，尽管对于一般的二阶双曲型方程，它不一定能解释成为有具体物理意义的某种能量. 相应地，在给定的偏微分方程两边乘一个与未知函数有关的微分表达式(在定理 2.1 中，这个表达式就是 u_t)，然后利用格林公式加以分部积分，最后导出对于未知函数及其偏导数的正定积分的估计式，这种方法就称为能量积分法.

上面得到的 (2.15) 式也说明了解的稳定性. 因为若解存在，则在时刻 t 的能量 $E(t)$ 可以被初始时刻的能量 $E(0)$ 所控制. 当 $E(0)$ 充分小时，$E(t)$ 也将充分小.

和第三章中一样，能量积分法也可以用于讨论双曲型方程的柯西问题. 设 P_0: $(x_1^0, \cdots, x_n^0, t^0)$ 为上半空间 R_+^{n+1} 中的任一点，Σ 是以 P_0 为顶点开口向下的圆锥面:

$$\operatorname{tg}^2\theta(t-t^0)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2=0,\ t<t_0, \tag{2.16}$$

其中 θ 为锥的半顶角. 它在 Σ 上满足条件

$$\operatorname{tg}^2\theta \geqslant \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2(x,\ t) \quad (j=1,\ \cdots,\ n),$$

其中 α 是(2.2)中出现的常数. 记 Σ 与平面 $t=$ 常数的截口为 $\Gamma(t)$，它所围成的区域为 $\Omega(t)$，定义

$$E(t)=\int_{\Omega(t)}\left[u_t^2(x,\ t)+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\ t)u_{x_i}(x,\ t)u_{x_j}(x,\ t)\right]dx,$$

则可以类似地证明形如(2.15)的能量不等式成立，从而可得

定理 2.2 方程(2.1)满足初始条件

$$t=0:\ u=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}=\psi(x) \tag{2.17}$$

的柯西问题的解是唯一的，且关于初始条件是稳定的.

这个定理的详细证明留作习题.

能量积分不仅可以用来证明解的唯一性与稳定性，而且可以与泛函分析方法相结合用于证明解的存在性，这儿我们不作详述. 在下面两节中我们指出这个方法在研究抛物型方程与椭圆型方程中的作用.

2.2 抛物型方程的能量积分法

对于一般的二阶抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+C(x,t)u$$
$$=f(x,t),\tag{2.18}$$

现在用能量积分法来讨论其混合问题解的唯一性. 这儿，系数 a_{ij}, b_i 及 c 所满足的条件与定理 2.1 中一致，而定解条件为

$$t=0:\ u=\varphi(x)\quad (x\in\Omega),\tag{2.19}$$

$$u|_{\Sigma}=0.\tag{2.20}$$

和以前一样，为证明解的唯一性，只需证明在初始条件与方程右端项均为零时只有零解. 为此，在(2.18)两边乘以函数 u，并在 $\Omega\times(0,t_1)$ 上积分，得

$$\int_0^{t_1}\int_\Omega\Big(uu_t-u\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}+u\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}+Cu^2\Big)dx\,dt=0.\tag{2.21}$$

注意到 $uu_t=\frac{1}{2}(u^2)_t$ 及

$$ua_{ij}u_{x_ix_j}=(ua_{ij}u_{x_i})_{x_j}-a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}-(a_{ij})_{x_j}u_{x_i}u,$$

可将(2.21)式写为

$$\int_0^{t_1}\int_\Omega\Big[\frac{1}{2}(u^2)_t+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}-\sum_{i,j=1}^{n}(ua_{ij}u_{x_i})_{x_j}+Q(u,u_x)\Big]dx\,dt$$
$$=0,$$

其中 Q 为 u 与 u_{x_1}, …, u_{x_n} 的二次形式，但不含 u_{x_i} 与 u_{x_j}(i, j 为 1 到 n 中的任意数)的乘积项. 利用格林公式，由上式得

$$\int_\Omega\left[\frac{1}{2}u^2\right]_{t=0}^{t=t_1}dx-\int_0^{t_1}\int_\Gamma u\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\cos(\boldsymbol{n},x_j)dS\,dt$$

$$+\int_0^{t_1}\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}+Q(u,u_x)\right]dx\,dt=0, \qquad (2.22)$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Γ 的单位外法线向量. 据条件 (2.20), 上式中在 $\Gamma\times(0,t_1)$上的积分为零, 又由系数 a_{ij} 所满足的正定性条件(2.2), 有

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\geqslant\alpha\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2.$$

此外, 利用对任意 $\varepsilon>0$ 成立的不等式 $2ab\leqslant\varepsilon a^2+\frac{1}{\varepsilon}b^2$, 有

$$|Q(u,u_x)|\leqslant C_1\left(u^2+\sum_{i=1}^n|u|\cdot|u_{x_i}|\right)$$

$$\leqslant C_2\left(u^2+\varepsilon\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right),$$

其中 C_1 及 C_2 为某些正常数.

于是, 取 ε 适当小, 使 $C_2\varepsilon<\alpha$, 由(2.22)式可得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,t_1)dx-\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,0)\,dx\leqslant C_2\int_0^{t_1}\int_\Omega u^2(x,t)dx\,dt. \qquad (2.23)$$

于是若记

$$E_1(t)=\int_\Omega u^2(x,t)dx, \qquad (2.24)$$

则从(2.23)式可得

$$E_1(t_1)\leqslant E_1(0)+C_2\int_0^{t_1}E_1(t)\,dt.$$

由此由引理 2.2 可得

$$E_1(t)\leqslant E_1(0)e^{C_2t}. \qquad (2.25)$$

注意到此时用(2.24)式定义的 $E_1(t)$ 与用(2.10)式定义的 $E(t)$ 不同, 但 $E_1(t)$ 也是一个正定的积分, 仍称它为"能量". 由(2.25)立刻可得一般的二阶抛物型方程的上述混合问题的解的唯一性与解关于初始资料的稳定性.

2.3 椭圆型方程的能量积分法

现在我们指出能量方法在研究椭圆型方程中的作用. 为叙述

简单起见，我们讨论下述的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u+c_0u=f,\ x\in\Omega, & (2.26)\\ u|_\Gamma=0, & (2.27)\end{cases}$$

其中 C_0 为给定的常数. 此时我们所希望得到的能量不等式是用方程(2.26)的右端项 f 来控制解的估计式. 将方程(2.26)的两端乘以 u，并在 Ω 中积分，可得

$$\int_\Omega\left(u\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}+c_0u^2\right)dx=\int_\Omega uf\,dx.$$

由(2.27)式，并利用格林公式可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}dx&=\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)dx\\&=\int_\Gamma\sum_{i=1}^n u\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(\boldsymbol{n},\ x_i)\,dS-\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx\\&=-\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2-c_0u^2\right)dx=-\int_\Omega uf\,dx.\tag{2.28}$$

如果 $c_0\leqslant0$，则利用施瓦兹(Schwarz)不等式从(2.28)可得

$$\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx\leqslant\left(\int_\Omega u^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega f^2\,dx\right)^{\frac12}.$$

两边平方后，再利用弗里德里克斯不等式(2.9)，即得

$$\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx\leqslant C\int_\Omega f^2\,dx,\tag{2.29}$$

其中 C 为一正常数. 这就是所考察的狄利克雷问题的解的能量不等式. 由此也可推知该问题的解的唯一性及解关于方程右端项 f 的稳定性.

这里特别需要注意的是上述能量不等式是在 $c_0\leqslant0$ 的假设下得到的. 当 $c_0>0$ 时，这种类型的能量不等式就不一定成立. 作为一个简单的反例，设 Ω 为平面上的矩形区域$[0,\ \pi;0,\ \pi]$，并取 $c_0=2$，$f=0$，则易知 $u=\sin x\sin y$ 是(2.26)，(2.27)的相应的齐次问题一个非平凡解. 由于解的唯一性不成立，显然这时不能有

形如(2.29)的能量估计式．事实上，这里的常数 $c_0=2$ 就是微分算子 $-\Delta$ 在狄利克雷边界条件下的一个特征值，而 $u=\sin x\sin y$ 是相应的特征函数．

对于一般的二阶椭圆型方程的能量不等式，也成立类似的事实．

习　题

1．试对 $n>2$ 的情形直接证明弗里德里克斯不等式(2.9)．

2．详细推导一般的二阶双曲型方程的柯西问题的能量不等式，并证明定理 2.2．

3．对于二阶抛物型方程在边界上取第二类边界条件

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(n,\ x_j)\Big|_{\Sigma}=0$$

的混合问题推导相应的能量不等式．

4．考察在有界区域 Ω(其边界为 Γ)上椭圆型方程的狄利克雷问题

$$\begin{cases}-\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}+c_0u=f,\\ u\big|_{\Gamma}=0,\end{cases}$$

其中 a_{ij}, b_i 为在 $\bar{\Omega}$ 上连续可微的函数，c_0 为常数．$a_{ij}=a_{ji}$，且对任意的 $x\in\bar{\Omega}$, $\xi\in R^n$ 成立

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\quad(\alpha>0\text{ 常数}),$$

试证当 c_0 为适当大的正数时，成立形如(2.29)的能量不等式．

§3　基 本 解

3.1　调和方程的基本解

由第四章中的讨论，我们知道对在有界区域 Ω 上三维泊松方程

$$-\Delta u=f, \tag{3.1}$$

体位势

$$u(x, y, z)=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{3.2}$$

是它的一个特解．这里，为以下叙述方便起见，我们将方程(3.1)的左端写为 $-\Delta u$ 的形式．

联系到静电学的物理模型，(3.1) 可视为当区域 Ω 中的电荷分布密度为 $\frac{1}{4\pi}f(x, y, z)$时，其相应的静电势 $u(x, y, z)$所满足的方程．此外．放置在点(ξ, η, ζ)处的一个单位正点电荷所产生的静电势已知为

$$u=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}, \tag{3.3}$$

这个函数除在点(ξ, η, ζ)具有奇性外，到处满足调和方程．这样，(3.2) 式右端的积分就可以解释为密度是 $\frac{1}{4\pi}f(\xi, \eta, \zeta)$的分布电荷在各点所产生的静电势的迭加，它是函数 $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$与函数 $\frac{1}{4\pi}f(x, y, z)$的卷积．

由此可见，对于调和方程而言，函数 $\frac{1}{4\pi r}$(为以后的叙述与应用方便起见，我们将(3.3)式的右端乘以常数因子 $\frac{1}{4\pi}$)具有特殊重要的地位：一方面它是调和方程在(ξ, η, ζ)点具有奇性的解；另一方面，以任意函数 $f(x, y, z)$ 作为非齐次项的泊松方程(3.1)的特解可以用 f 与这个函数的卷积来表示．这种解 $\frac{1}{4\pi r}$ 称为三维调和方程的基本解，也称为三维算子 $-\Delta$ 的基本解．

如果函数 $g(x, y, z)$ 是调和方程在区域 Ω 中的一个经典解，那末函数 $\frac{1}{4\pi r}-g$ 也具有上述两个性质，因此它也可以称为调和方程的基本解．这样，格林函数也是调和方程的一个基本解．

为准确地给出基本解的定义必须用到 δ 函数，下面我们简略地介绍有关的概念．

3.2 δ函数与基本解

在物理中经常遇到连续分布的量和集中分布的量，例如质量、电荷等. 当需要统一地处理这两种量时，采用经典的函数概念来处理问题的方法就遇到了困难. 以电荷的分布为例，设在区域Ω中有密度为$\rho(x, y, z)$的电荷分布着，则在Ω的任一子区域Ω_0中其电荷总量为$\iiint\limits_{\Omega_0}\rho(x, y, z)dx\,dy\,dz$. 但若在区域$\Omega$中某一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$处有一单位集中电荷，而其余处无电荷分布，则对$\Omega$的任一子区域$\Omega_0$，当$M_0\in\Omega_0$时，包含在$\Omega_0$中的电荷总量为1；而当$M\notin\Omega_0$时，包含在$\Omega_0$中的电荷总量为0. 现在要问，对这种集中电荷，能否也用分布密度的形式来描述呢？

在电荷为连续分布的情形下，电荷密度的定义已知是

$$\rho(x, y, z)=\lim_{\substack{\Omega_0\to(x,y,z)\\(x,y,z)\in\Omega_0}}\frac{\text{包含在 }\Omega_0\text{ 中电荷总量}}{\Omega_0\text{ 的体积}}. \tag{3.4}$$

但如果我们将这个等式应用于前面所述的集中电荷的情形，就得到：当$(x, y, z)\neq(x_0, y_0, z_0)$时$\rho(x, y, z)=0$；而当$(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)$时，(3.4)式右端的极限是$+\infty$. 因此，对于集中电荷而言，其电荷密度函数不仅不是连续的，而且根本无法用经典意义下的函数来描述. 为克服这一困难，就需要把经典的函数概念加以推广.

本世纪四十年代以来发展起来的广义函数论，适应了这种同时描述连续分布量与集中分布量的需要，并为之奠定了严格的数学理论基础. 其基本想法是把经典意义下的函数看成某个给定函数空间Φ上的线性连续泛函，而这个函数空间Φ上的线性连续泛函的全体包含比经典函数多得多的元素，它们在广义的意义下也称为函数(广义函数)，且可能用于许多经典函数所不能使用的场合，例如用来表示集中分布量等等.

我们现在稍详细地(但仍是非常粗略地)来说明这一点. 以一维情形为例，取Φ为定义在实轴$(-\infty, +\infty)$上的无穷可微函数

的集合，其中的每个函数均在一个有限区间外恒等于零(称为具有紧支集)．这样，若 $f(x)$ 是一个给定的可积函数，对于函数空间 Φ 中每一个元素 φ，都可以规定一个实数 f_φ：

$$f_\varphi=(f(x),\ \varphi(x))\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)\,dx, \tag{3.5}$$

这就建立了函数 $\varphi\in\Phi$ 到实数 f_φ 之间的一个对应，即得到一个泛函．这个泛函显然是一个线性泛函，但在函数空间 Φ 上的任一线性泛函不一定都能如 (3.5) 那样与一个普通的可积函数对应．例如给出线性泛函

$$F(\varphi)=\varphi(0), \tag{3.6}$$

它就不能用(3.5) 的形式来表示．事实上，如果有可积函数 $f(x)$ 存在，使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(0) \tag{3.7}$$

对一切 $\varphi\in\Phi$ 成立，则在不含原点的任一区间中必成立 $f(x)\equiv0$ (作为习题)，由此对一切 $\varphi\in\Phi$，有 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)\,dx=0$．从而只要 $\varphi(0)\neq0$，(3.7)式就不能成立．

我们称由(3.6)式定义的泛函为 δ 函数，并将它形式地记为

$$(\delta(x),\ \varphi(x))\triangleq\int\delta(x)\varphi(x)\,dx.$$

为了更直观地了解 δ 函数，引进如下的函数列：

$$\delta_h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h}, & -\dfrac{h}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{h}{2},\\[2mm] 0, & x<-\dfrac{h}{2}\text{ 或 }x>\dfrac{h}{2},\end{cases} \tag{3.8}$$

并考察积分 $\int\delta_h(x)\varphi(x)dx$．利用中值定理有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_h(x)\varphi(x)\,dx=\frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\varphi(x)dx=\varphi(\xi),$$

其中 $\xi\in\left(-\dfrac{h}{2},\ \dfrac{h}{2}\right)$．当 $h\to0$ 时，$\varphi(\xi)\to\varphi(0)$，于是由上式有

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_h(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(0)=F(\varphi)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(x)\,dx.$$

这样，δ 函数可以看成是函数列 $\delta_h(x)$ 在某种意义下(弱收敛)的极限．从而可以粗糙地把 $\delta(x)$ 想象为在 $x\neq 0$ 时为 0，在 $x=0$ 时为 $+\infty$，而其"积分"等于 1 的一个"函数"．

这样，我们可以将函数空间 Φ 上的线性泛函视为一种新的"函数"．这样定义的"函数"包括了所有普通的可积函数，也包括了许多不是普通意义下的函数，统称之为广义函数，或称为分布．

广义函数的线性运算可以根据线性泛函的相应运算来定义．广义函数的一个重要的特点是可以进行求导运算．为了说明一个广义函数 $f(x)$ 的导数的定义，先考察 $f(x)$ 是一个普通的可微函数的情形．此时，由分部积分法则，并注意到 $\varphi\in\Phi$ 具有紧支集，我们有

$$(f'(x),\ \varphi(x))\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\varphi(x)dx$$
$$=f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi'(x)\,dx$$
$$=-(f(x),\ \varphi'(x)).$$

将这个事实加以推广，对于广义函数 $f(x)$，就可用下式来定义一个新的广义函数 $f'(x)$，称为它的导数：对任何 $\varphi(x)\in\Phi$，

$$(f'(x),\ \varphi(x))\triangleq-(f(x),\ \varphi'(x)). \tag{3.9}$$

注意到当 $\varphi(x)\in\Phi$ 时，$\varphi'(x)$ 也是具紧支集的 C^∞ 函数，因此 $\varphi'(x)\in\Phi$，而(3.9)的右边有确定的值．类似地可以逐次地定义一个广义函数的高阶导数．

关于多维空间中广义函数的定义及其求导运算的意义，也可以类似地给出．

关于广义函数及其性质．详见附录三．

利用 δ 函数，可以将调和方程的基本解重新定义如下．

定义 3.1 若广义函数 E 满足

$$-\Delta E \triangleq -\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}=\delta(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0),\tag{3.10}$$

则称 E 为三维调和方程在$(x_0,\ y_0,\ z_0)$点的基本解。

现在验证前面引入的函数

$$\frac{1}{4\pi r}=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

的确满足这一定义. 不妨设$(x_0,\ y_0,\ z_0)$为原点，于是

$$\frac{1}{4\pi r}=\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

将它看成一个广义函数，按广义函数导数的定义，为验证

$-\Delta\left(\frac{1}{4\pi r}\right)=\delta(x,\ y,\ z)$，只须验证下述等式

$$\iiint\limits_{R^3}\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi\,dx\,dy\,dz=-\varphi(0,\ 0,\ 0)\tag{3.11}$$

对于每一个具紧支集的 C^∞ 函数 $\varphi(x,\ y,\ z)$成立.

由于 φ 具紧支集，我们可以取区域 Ω 足够大，使 φ 在 Ω 外及在 Ω 的边界 Γ 附近恒等于零. 再取一个以原点为中心、ε 为半径的球面 Γ_ε，并记 Γ_ε 与 Γ 之间所夹的区域为 Ω_ε. 取 $u=\frac{1}{4\pi r}$，根据格林第二公式有

$$\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}(u\Delta\varphi-\varphi\Delta u)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{\Gamma\cup\Gamma_\varepsilon}\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS.\tag{3.12}$$

但在 Ω_ε 中 $\Delta u\equiv0$，于是，注意到 φ 具紧支集，当 $\varepsilon\to0$ 时，等式左边趋于 $\iiint\limits_{R^3}\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi\,dx\,dy\,dz$. 而在等式右边，当 $\varepsilon\to0$ 时，仿照第四章中建立基本积分公式时的方法，易知有

$$\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon}\varphi\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\to\varphi(0,\ 0,\ 0),\quad\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon}u\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS\to0;$$

再注意到在 Γ 附近 $\varphi=0$，从而 $\iint\limits_{\Gamma}\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=0$，于是，令 $\varepsilon\to 0$，由(3.12)直接导出(3.11)式. 这就说明了按定义 3.1，$\frac{1}{4\pi r}$ 的确为三维调和方程的基本解.

3.3 热传导方程的基本解

对于热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x, t),\\ t=0:\ u=0,\end{cases}\tag{3.13}$$

由泊松公式，已知其解的表达式为

$$u(x, t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi\, d\tau.\tag{3.14}$$

于是，若令

$$U(x-\xi, t-\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}, & (t>\tau),\\ 0, & (t\leqslant\tau),\end{cases}\tag{3.15}$$

并且将 $f(x, t)$ 在下半平面 $t<0$ 用零值延拓，就可将(3.14)写为

$$u(x, t)=\iint\limits_{R^2}U(x-\xi, t-\tau)f(\xi, \tau)d\xi\, d\tau.\tag{3.16}$$

$U(x-\xi, t-\tau)$ 仅在 $(x, t)=(\xi, \tau)$ 点具有奇性，除此点外它是一个 C^∞ 函数，且在 $t>\tau$ 时对 (x, t) 满足热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$，而对具非齐次项 $f(x, t)$ 的热传导方程的柯西问题(3.13)，其解可由(3.16)式表示为 U 与 f 的卷积形式. 因此，对于热传导方程而言，函数 $U(x-\xi, t-\tau)$ 起着与函数 $\frac{1}{4\pi r}$ 在调和方程中的同样的作用. 它实际上就是热传导方程的基本解.

现在我们验证 $U(x-\xi, t-\tau)$ 满足

$$\frac{\partial U}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\delta(x-\xi, t-\tau).\tag{3.17}$$

为此，只须验证对任意具紧支集的 C^∞ 函数 $\varphi(x, t)$，成立

$$\iint_{R^2} U\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)dx\,dt=\varphi(\xi, \tau). \tag{3.18}$$

为证明(3.18)式，取一个以(ξ, τ)为中心、边长分别为 2δ 与 2ε 的矩形 $A=[\xi-\delta, \xi+\delta; \tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon]$. 由于 φ 具有紧支集，利用分部积分，可得

$$\iint_{R^2\setminus A} U\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)dx\,dt$$

$$=\iint_{R^2\setminus A}\left(\frac{\partial U}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\varphi\,dx\,dt+\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}[\varphi U]_{t=\tau-\varepsilon}^{t=\tau+\varepsilon}dx$$

$$+\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}a^2\left[U\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_{x=\xi-\delta}^{x=\xi+\delta}dt-\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}a^2\left[\frac{\partial U}{\partial x}\varphi\right]_{x=\xi-\delta}^{x=\xi+\delta}dt.$$

由于 U 在 $t>\tau$ 时满足热传导方程，且在 $t\leqslant\tau$ 时恒为 0，故有

$$\iint_{R^2\setminus A} U\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)dx\,dt$$

$$=\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}\varphi U\big|_{t=\tau+\varepsilon}dx+\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon}a^2\left[U\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_{x=\xi-\delta}^{x=\xi+\delta}dt$$

$$-\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon}a^2\left[\frac{\partial U}{\partial x}\varphi\right]_{x=\xi-\delta}^{x=\xi+\delta}dt. \tag{3.19}$$

现取 $\delta=\varepsilon^{\frac{1}{3}}$，并令 $\varepsilon\to 0$ 来考察(3.19)右端项的极限. 我们有

$$\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}\varphi U\big|_{t=\tau+\varepsilon}dx=\varphi(x^*, t^*)\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}\frac{1}{2a\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2\varepsilon}}dx$$

$$=\varphi(x^*, t^*)\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{2a\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4a^2\varepsilon}}dx$$

$$=\varphi(x^*, t^*)\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{\delta}{2a\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{\delta}{2a\sqrt{\varepsilon}}}e^{-\zeta^2}d\zeta,$$

其中(x^*, t^*)为矩形 A 中某点. 当 $\varepsilon\to 0$ 时，$(x^*, t^*)\to(\xi, \tau)$，而积分限 $\pm\dfrac{\delta}{2a\sqrt{\varepsilon}}\to\pm\infty$. 注意到 $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\zeta^2}d\zeta=1$，就得到

$$\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}\varphi U\big|_{t=\tau+\varepsilon}dx\to\varphi(\xi, \tau).$$

再估计(3.19)右端的最后两项积分. 注意到

$$\frac{\partial U}{\partial x}\varphi\Big|_{x=\xi+\delta}=-\frac{(x-\xi)}{4a^3\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\varphi\Big|_{x=\xi+\delta}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\delta^2}\left(\frac{\delta}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)^3 e^{-\frac{\delta^2}{4a^2(t-\tau)}}\varphi(t,\ \xi+\delta),$$

并由于 $\zeta^3e^{-\zeta^2}$ 是一个有界量, 所以当 $\varepsilon\to 0$ 时,

$$\left|\int_\tau^{\tau+\varepsilon}\frac{\partial U}{\partial x}\varphi\Big|_{x=\xi+\delta}dt\right|\leqslant C\int_\tau^{\tau+\varepsilon}\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\delta^2}dt\leqslant C_1\varepsilon^{\frac{1}{3}}\to 0.$$

同法可证(3.19)式右端最后两项积分在 $\varepsilon\to 0$ 时均趋于零. 这样, 在(3.19)式中令 $\varepsilon\to 0$ 取极限就得到(3.18)式.

由(3.16)式可见, 热传导方程基本解 $U(x-\xi,\ t-\tau)$ 的物理意义表示在时刻 $t=\tau$, 位置 $x=\xi$ 的一个单位热源所产生的温度分布.

现在再介绍另一种基本解的概念——*热传导方程柯西问题的基本解*.

对于齐次热传导方程取给定初值的下述柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\\ t=0:\ u=\varphi(x),\end{cases}\tag{3.20}$$

已知其解可以表示为

$$u(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)d\xi.\tag{3.21}$$

由于此解应满足初始条件, 令 $t\to 0$ 就得到

$$\varphi(x)=\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\,d\xi.$$

注意到上式左端可写为 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)\varphi(\xi)d\xi$ 的形式, 因此, 当 $t\to 0$ 时, $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$ 应在某种意义下收敛于 $\delta(x-\xi)$, 这种收敛称为弱收敛. 函数 $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$ 在区域 $t\geqslant 0$ 上除在点 $(x,\ t)=(\xi,0)$ 具有奇性外, 在其它地方都是 C^∞ 函数, 且在 $t>0$ 时对 (x,t) 满足齐次热传导方程, 因此我们就将它作为柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\\ t=0:\ u=\delta(x-\xi)\end{cases}$$

的解．并称为柯西问题的基本解．泊松公式(3.21)告诉我们，热传导方程的一般柯西问题(3.20)的解可以通过其柯西问题的基本解来构造．

我们同样可以讨论波动方程的基本解以及波动方程柯西问题的基本解，也可以讨论更一般的方程及其定解问题的基本解．但由于将涉及到更多关于广义函数的知识，这里从略．

习　　题

1．试证明 $u(x,\ y)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r}$ 是二维调和方程的基本解．

2．证明对在区间[$a,\ b$]上给定的可积函数 $f(x)$，若

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=0$$

对一切 $\varphi\in\Phi$ 成立，则 $f(x)$ 在[$a,\ b$]上恒为零．

3．对三维热传导方程，其基本解与柯西问题基本解是什么？

§4　二阶方程的特征理论

4.1　特征概念

从第一章§2中关于两自变数的二阶线性方程分类的讨论中知道，三种类型方程的区分取决于它们的主部系数，即二阶偏导数前的系数的代数性质．对于形如

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f \tag{4.1}$$

的二阶偏微分方程，可以利用其二阶偏导数前的系数作出特征方程

$$a_{11}\,dy^2-2a_{12}\,dx\,dy+a_{22}\,dx^2=0. \tag{4.2}$$

如果 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$，则从方程(4.2)可以解出两族特征线，这时方程为双曲型；如果 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$，则从(4.2)可解出一族特征线(重特征)，这时方程为抛物型；如果 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$，则(4.2)无实解，即没有实特征线，这时方程为椭圆型．由此可见，一个方程的

特征线的性态决定了它的类型．又从第三章知道，对双曲型方程来说，影响区域、决定区域和依赖区域都是由特征线或特征锥面来划分的，所以我们有必要进一步讨论特征线与特征曲面的理论，简称特征理论．

为了了解特征线及特征曲面的共同特点及其重要作用，我们先介绍弱间断解的概念．对于一个二阶偏微分方程来说，若有一函数 $u=u(x)$ 在某个 n 维区域内有一阶连续偏导数，且在此区域内除了一个 $(n-1)$ 维的光滑超曲面 S($n=2$ 时是曲线)外，有二阶连续偏导数，并处处满足方程，同时 u 的二阶偏导数在 S 上的左右极限均存在(具有第一类间断)，就称这个函数 u 为方程的弱间断解．这种弱间断解虽然在曲面 S 上不满足方程，但从物理的角度来看，仍可以是完全合理的．事实上，我们回忆一下例如说第二章中建立热传导方程的过程，那时首先得到的是一个只包含未知函数的一阶偏导数的积分等式，仅仅在利用格林公式将它化成偏微分方程时，才要求未知函数有二阶连续偏导数．这就是说，在原始物理问题中，只要求未知函数有一阶连续偏导数就可以了，因而有可能出现在物理上有意义的弱间断解．

以弦振动方程为例．考察形为 $f(x-at)$ 的右传播波解，它在特征线 $x-at=$常数上为常数．容易构造一个函数 $g(x)$，使它在 $(-\infty, +\infty)$ 中一次连续可微，且除了 $x=\pm1$ 外还是二次连续可微的，而在 $x=\pm1$ 处二阶导数有第一类间断．则根据这个函数 $g(x)$ 所作出的解 $u(x, t)=g(x-at)$ 就是一个弱间断解，而 $x-at=1$ 与 $x-at=-1$ 为它的两条弱间断线，它们分别表示波的前阵面与后阵面．

从上面的例子可以看到弱间断线恰好是特征线，或者说弱间断沿特征线发生，弱间断沿特征线传播等等．这个事实并非巧合，而是反映了一个很重要的事实．一般来说，对于给定的一个偏微分方程，并非任何一个曲面(曲线)都可以作为方程的一个弱间断解的弱间断面(弱间断线)．而哪些曲面(曲线)可以作为弱间断面(线)，哪些则不可以，完全由方程本身的特性所决定．下面我们将

对一般的二阶线性偏微分方程来导出一个曲面(曲线)可能作为某个弱间断解的弱间断曲面(曲线)的条件，并将满足此条件的曲面(曲线)称为特征曲面(特征线)，简称为特征。

4.2 特征方程

在 n 维空间 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的某区域 Ω 上，考察下面一般的二阶线性偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f. \tag{4.3}$$

我们问，在什么条件下一个超曲面

$$S:\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0 \tag{4.4}$$

可以成为方程(4.3)某个弱间断解的间断面？注意到弱间断解的定义，这个问题可以改为下面的提法：如果在 S 上给定了函数 u 及其所有一阶偏导数的值，能不能利用这些值以及方程(4.3)来唯一地决定 u 的二阶偏导数在 S 上的值？显然，如果能够唯一地在 S 上决定出 u 的二阶偏导数之值，那末 S 就不可能成为某个弱间断解的弱间断曲面。

首先考察 S 为坐标超平面 $x_n=0$ 的特殊情形．若在 S 上 u 及其一阶偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x_i}(i=1, 2, \cdots, n)$ 之值为已知的 $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ 的函数，则显然二阶偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_l}$ $(i=1, \cdots, n;\ l=1, \cdots, n-1)$ 在 S 上的值也可以由将 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 对 x_l 求导而唯一决定．因此，唯一需要决定的是二阶偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ 在 S 上的值．利用方程(4.3)易知，若 $a_{nn}(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)\neq 0$，则可以在 S 上唯一地决定出 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ 之值．因此，若成立

$$a_{nn}(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)\equiv 0, \tag{4.5}$$

就不能在 S 上唯一地决定出 u 的一切二阶偏导数．(4.5)就是坐标超平面 $x_n=0$ 可能成为某个弱间断解的弱间断面的条件．

现在回到一般的情形(4.4)，看 S 可能成为弱间断面的条件．此时，只要利用一个自变数的可逆变换

$$\begin{cases}\xi_i=g_i(x_1,\cdots,x_n)\quad(i=1,\cdots,n-1),\\ \xi_n=\varphi(x_1,\cdots,x_n),\end{cases}\tag{4.6}$$

使 S: $\varphi=0$ 化为新坐标系下的坐标超平面 $\xi_n=0$，就可以由上述结果得到相应的结论．事实上，在坐标变换(4.6)下，有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i},\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=\displaystyle\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_k\partial\xi_l}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_l}{\partial x_j}+\text{只包含 }u\text{ 的一阶偏导数的项},\end{cases}$$

于是方程(4.3)就化为

$$\sum_{k,l=1}^{n}\tilde{a}_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_k\partial\xi_l}+\cdots=f\tag{4.7}$$

的形式，其中被省略的项仅包含 u 及 u 的一阶偏导数，而

$$\tilde{a}_{kl}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_l}{\partial x_j}.\tag{4.8}$$

由 (4.5) 式就可得到 S 可能成为 (4.3) 的某个弱间断解的弱间断面的条件为

$$\tilde{a}_{nn}(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},0)\equiv0,$$

即
$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\xi_n}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_n}{\partial x_j}\bigg|_{\xi_n=0}\equiv0.$$

注意到(4.6)的最后一式，上式就可写为

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=0\quad\text{在 }S(\varphi=0)\text{上成立}.\tag{4.9}$$

如果在曲面 S 上成立(4.9)，就称 S 为方程(4.3)的特征曲面．

这里需着重指出，只有特征曲面才有可能成为某个解的弱间断曲面，而特征曲面的定义只依赖于方程主部的系数，与低阶项的系数无关．此外，一个曲面 $S(\varphi=0)$是特征曲面，只要在 S 上成立(4.9)式．如果成立

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\equiv0,\tag{4.10}$$

那末不仅 $\varphi=0$ 是一个特征曲面，而且 $\varphi=$常数还构成一族特征曲面；反之亦然．

对于一个固定的点 x，如果过该点的方向 $l(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$满足特

征方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j=0, \tag{4.11}$$

则称 l 为过此点的特征方向．由于$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$表示曲面 $\varphi=0$ 的法线方向，所以特征曲面也就是每点的法线方向均为特征方向的曲面．

有时也称过一点的以特征方向为法线方向的 $n-1$ 维超平面为该点的特征平面，而在一点由特征平面的包络所成的锥面为特征锥面．

4.3 例

现在举一些常见的偏微分方程作为例子来求出它们的特征方程或特征曲面．在考察这些例子时，我们总是假设

$$\sum \alpha_i^2=1, \tag{4.12}$$

即取 α_i 为特征方向的方向余弦．

【例 4.1】 对于两自变数的二阶线性偏微分方程

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f,$$

其特征方程为

$$a_{11}\alpha_1^2+2a_{12}\alpha_1\alpha_2+a_{22}\alpha_2^2=0,$$

满足上述关系式的方向 (α_1, α_2) 为特征方向．

方程 $$a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2=0$$

的解 $\varphi=\varphi(x, y)$ 给出一族特征线 $\varphi(x, y)=$常数，它就是常微分方程(4.2)的一族解．因此，我们这里对于 n 个自变数的二阶偏微分方程的特征曲面的定义是第一章中对两自变数情形下特征线定义的推广．

【例 4.2】 拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$$

的特征方程为

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2=0.$$

由(4.12)式，拉普拉斯方程没有实的特征方向，从而不存在弱间断解.

【例 4.3】 波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

的特征方程为

$$\alpha_0^2=a^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2).$$

由(4.12)式，应有

$$\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2=1,$$

故

$$\alpha_0=\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \alpha_1^2+\alpha_2^2=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

这样，过任一点的特征方向与 t 轴的夹角为 $\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{a}$，它的方向余弦可以写成

$$(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2)=\left(\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+a^2}}\right),$$

其中 θ 为参数. 这些特征方向的全体构成一个锥面.

过一点 $(x_0,\ y_0,\ t_0)$，作以此点的特征方向为法线方向的平面族

$$a(t-t_0)+\cos\theta(x-x_0)+\sin\theta(y-y_0)=0\quad(\theta\ 为参数)$$

的包络，可以得到以此点为顶点的一个锥面，它就是我们在第三章所述的特征锥面. 事实上，将此平面族的方程关于参数 θ 求导一次，得

$$-\sin\theta(x-x_0)+\cos\theta(y-y_0)=0.$$

再消去参数 θ，即得到包络面的方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2(t-t_0)^2,$$

它就是过点 $(x_0,\ y_0,\ t_0)$ 的特征锥面，其半顶角为 $\mathrm{tg}^{-1}a$.

从特征曲面的定义可知特征曲面在其每点和由该点所作出的特征锥相切. 在第三章中可以看到，这种特征锥在波动方程的研究中起着特别重要的作用. 对于三维（n 维）波动方程，也有类似

的结果.

【例 4.4】 热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

的特征方程(4.11)为

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=0.$$

由(4.12)式,应有

$$\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1,$$

故 $\alpha_0^2=1$. 因此热传导方程的特征曲面为超平面 $t=$常数, 其柯西问题的初始条件恰给在特征面 $t=0$ 上, 这和波动方程的情形不同. 对波动方程的柯西问题来说,其初始平面 $t=0$ 为非特征面。

习　题

1. 求下列方程的特征方程和特征方向

(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_4^2}$;

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$;

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

2. 证明经过可逆的坐标变换 $x_i=f_i(y_1, \cdots, y_n)\ (i=1, \cdots, n)$,原方程的特征曲面变为经变换后的新方程的特征曲面, 即特征曲面关于可逆坐标变换具有不变性.

3. 试证二阶偏微分方程解的 m 阶弱间断(即直至 $m-1$ 阶偏导数为连续,m 阶偏导数有第一类间断)也只可能沿着特征曲面发生.

4. 试定义 n 阶线性偏微分方程的特征方程、特征方向和特征曲面.

§5　三类方程的比较与归纳

在本节中我们将前面学习过的三类典型方程的性质作一些比较和归纳,并指出对于一般的二阶线性抛物型、双曲型及椭圆型方程来说,这些性质多数能够保持. 由于一般的二阶线性方程已不再如这些典型方程那样具有常数系数,形式也更为复杂,要得出与三类典型方程相类似的结论往往要困难得多, 需要通过相当复杂的

运算与细致的分析，有时还需要引入新的数学工具. 因此，在本节中我们一般只叙述有关的结论，而不详加证明，目的使读者对于二阶线性偏微分方程的理论有一个概貌性的了解.

5.1 三类方程定解问题提法的比较

我们首先对调和方程、热传导方程与波动方程的定解问题的提法作一比较. 由于三类方程所反映的物理现象的特点有很大的差别，其相应的定解问题的提法也有很大的不同. 例如对调和方程而言，由于它反映了一些处于稳定或平衡状态的物理量的分布状况，在其定解问题中，只有边界条件而没有初始条件，因而一般不提柯西问题或混合问题. 对于热传导方程与波动方程，虽然都可以提柯西问题与混合问题，但它们所需要给出的初始条件的个数也不相同. 对热传导方程只需给一个初始条件；而对波动方程，却需要给两个初始条件.

如果我们将二维调和方程以及一维热传导方程、波动方程分别写成下列形式：

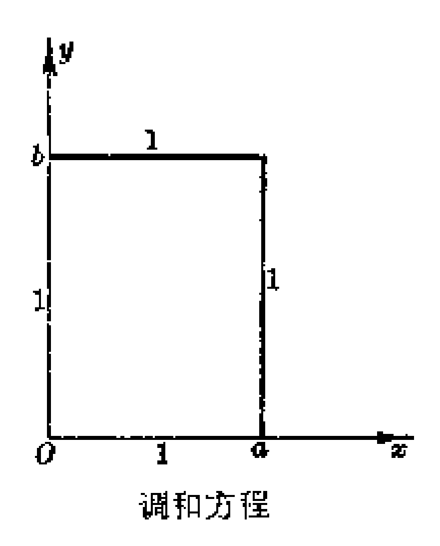
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{5.2}$$

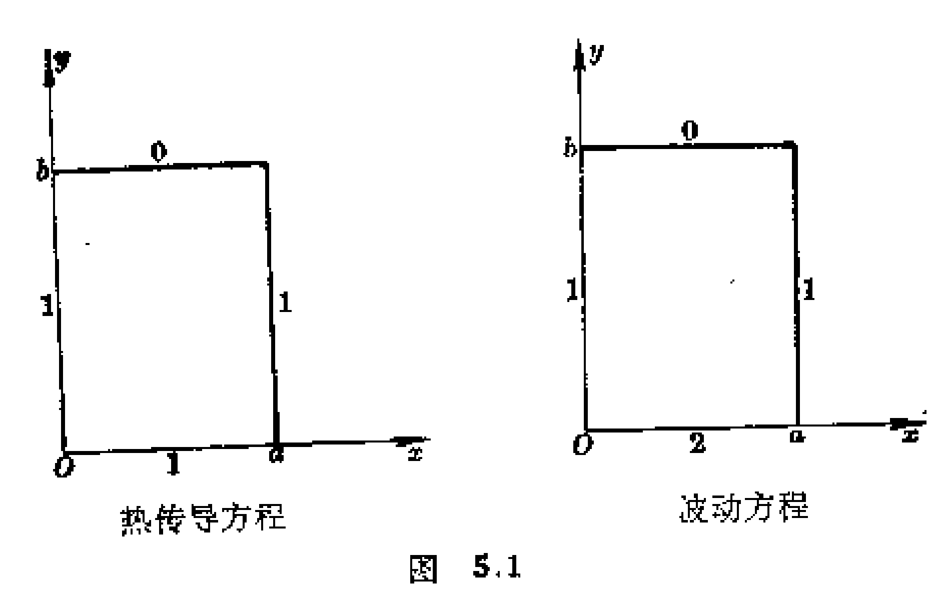
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{5.3}$$

在 xOy 平面的矩形区域 $\{0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b\}$ 上考察这些方程的定解问题，则在前面研究过的一些定解问题中，其相应的定解条件的给出方式可见下图(其中矩形每边上所附的数字表示定解条件的个数)：

很自然地会想到这样的问题，是否可以对调和方程提出柯西问题，或者对热传导方程、波动方程提出狄利克雷问题呢？要一般地说明对一个给定的方程，怎样的定解条件才是合理的，这个问题并不简单，它是一个专门研究的课题. 下面我们仅举例说明有些定解问题的提法不满足适定性的要求，因而是不完善的.



调和方程



热传导方程　　　　波动方程

图 5.1

我们回忆一下在第一章中提到过的适定性概念，它包含解的存在性、唯一性和稳定性这三个方面的内容. 存在性是指所讨论的定解问题至少有一个解；唯一性是指这个问题的解最多只有一个；而稳定性是指当出现在定解条件中的已知函数作很小的变化时，问题的解也变化很小.

现在我们介绍由阿达玛(Hadamard)首先给出的一个例子，它说明调和方程的混合问题是不稳定的. 考察调和方程的混合问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & (5.4)\\ y=0:\ u=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{n^k}\sin nx, & (5.5)\\ x=0 \text{ 及 } x=\pi:\ u=0, & (5.6)\end{cases}$$

利用分离变量法，易知此问题的解为

$$u_n(x,\ y)=\frac{1}{n^{k+1}}\sin nx\,\mathrm{sh}\,ny;$$

同时，也可以证明这个定解问题的解是唯一的．但是，如果我们以两个函数之差的绝对值的最大值来衡量这两个函数之间的差异（即采用连续函数的模），并把这个问题的解与满足齐次初始条件

$$y=0:\ u=\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{5.7}$$

及边界条件(5.6)的解 $u(x,\ y)\equiv 0$ 相比较，则容易看到，虽然它们满足同样的边界条件，且当 $n\to\infty$ 时，$u_n(x,0)-u(x,0)$（以及 $u_n(x,0)-u(x,\ 0)$ 的直到第 $k-1$ 阶的导数）关于 x 一致趋向于零，但是对于任一个固定点 $(x,\ y)$，只要 $y>0$，那么解 $u_n(x,\ y)$ 与 $u(x,\ y)$ 之差在 $n\to\infty$ 时却可以任意大．这就说明对调和方程的混合问题而言，尽管解是存在并且唯一的，但并不稳定．类似的例子可用来说明调和方程的柯西问题的解也是不稳定的．

现在考察热传导方程的狄利克雷问题．我们已知，对于热传导方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

只要在矩形区域 $[0,\ a;\ 0,\ b]$ 的三条边上，分别给定 $u(0,\ y)$，$u(a,\ y)$，$u(x,\ 0)$ 的值，所构成的混合问题的解就是唯一的．因此，如果再在边 $y=b$ 上任意给定 $u(x,\ b)$ 的值，解一般来说就不能存在．因此，对热传导方程不能提狄利克雷问题．

再考察一维波动方程的情形．由第三章中的结果，可将其改写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \tag{5.8}$$

的形式．在由 $\xi=a$，$\eta=b$，ξ 轴和 η 轴这四条边所围成的矩形区域上对它考察如下的狄利克雷问题（参见图 2）：

$$\begin{aligned} &u(\xi,\ 0)=f_1(\xi),\ u(\xi,\ b)=f_3(\xi)\quad (0\leqslant\xi\leqslant a),\\ &u(0,\ \eta)=f_2(\eta),\ u(a,\ \eta)=f_4(\eta)\quad (0\leqslant\eta\leqslant b). \end{aligned} \tag{5.9}$$

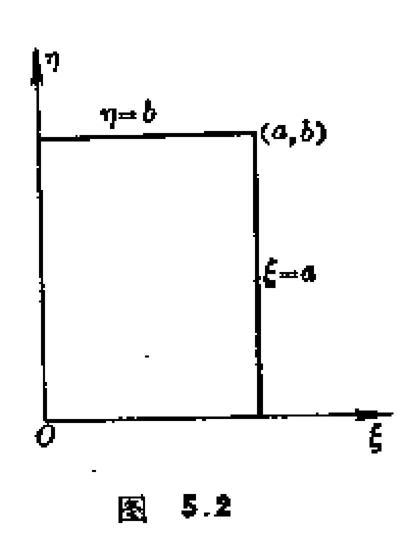


图 5.2

为使边界条件保持连续，在矩形的四个顶点应当满足相容性条件（$f_1(0)=f_2(0)$ 等）.

由于方程 (5.8) 的通解为 $u=F(\xi)+G(\eta)$，由 (5.9) 中给定在 ξ 轴与 η 轴上的边界条件已能完全决定解，其表达式为

$$u=f_1(\xi)+f_2(\eta)-f_1(0). \quad (5.10)$$

因此，只有在成立

$$\begin{aligned} f_3(\xi)&=f_1(\xi)+f_2(b)-f_1(0), \\ f_4(\eta)&=f_1(a)+f_2(\eta)-f_1(0) \end{aligned} \quad (5.11)$$

的特殊情况，所提的狄利克雷问题才会有解. 因此，对波动方程来说，一般地提出一个狄利克雷问题来求解是不合理的.

从上面的讨论可知，对不同类型的方程，通常应该提出不同的定解问题来加以研究. 我们在前面几章中所研究过的一些定解问题，其物理意义清楚，又满足适定性的要求，研究得也比较深入. 随着科学技术以及数学理论本身的日益发展，所研究的数学物理方程及其定解问题的类型越来越多，范围越来越广. 其中，除包括大量满足适定性要求的定解问题外，近年来，特别在流体力学、金属探矿及气象预报等实际问题中还经常遇到不适定问题需要加以研究，而且在理论及求解方法上都已有不少有价值的成果.

下面我们分别对二阶椭圆型、抛物型与双曲型方程的性质作一个概括性的小结，从中还可看到这三类方程在解的光滑性、解的极值性质、解的影响区域与依赖区域及解关于时间的反演等性质方面的区别.

5.2 二阶椭圆型方程小结

在 n 维欧氏空间的一个有界区域 Ω 中，一个二阶线性椭圆型方程的一般形式为

$$Lu\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c_0(x)u=f(x), \quad (5.12)$$

其中系数 $a_{ij}(x)$、$b_i(x)$ 及 $c_0(x)$ 适当光滑，$a_{ij}=a_{ji}$，并要求满足如下的条件：对任意的 n 维向量 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 及 $\bar{\Omega}$ 中的任一点 x 成立

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \quad (\alpha>0 \text{ 常数}). \tag{5.13}$$

设 Ω 的边界为 Γ，通常要求 Γ 是光滑(或分片光滑)的．设 $\boldsymbol{n}=(n_1, \cdots, n_n)$ 为 Γ 上的单位外法线向量，称 $\boldsymbol{\nu}=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}n_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n}a_{nj}n_j\right)$ 为 Γ 上的余法线向量．在 Γ 上给定的边界条件通常有如下的几种形式：

1) 狄利克雷条件：

$$u|_{\Gamma}=\varphi; \tag{5.14}$$

2) 诺伊曼条件：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma}=\varphi; \tag{5.15}$$

3) 第三类边界条件：

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+\sigma u|_{\Gamma}=\varphi \quad (\sigma>0); \tag{5.16}$$

4) 等值面边界条件：

$$u|_{\Gamma}=\text{待定常数 } C, \int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS=\text{已知常数 } A, \tag{5.17}$$

其中

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}n_j. \tag{5.18}$$

方程(5.12)带有上述边界条件的边值问题分别称为狄利克雷问题(第一类边值问题)，诺伊曼问题(第二类边值问题)，第三类边值问题以及等值面边值问题．

在对一般二阶椭圆型方程(5.12)及其定解问题的讨论中，系数 $c_0(x)$ 的符号起着重要的作用，它对于解的存在性、唯一性以及极值原理是否成立等都有很大的影响．

定理 5.1(极值原理) 设条件(5.13)成立，且 $c_0(x)\leqslant 0$．若在区域 Ω 内 $f(x)\geqslant 0$，则方程(5.12)的不恒等于常数的解不能在区域 Ω 的内部取到非负的极大值；类似地，若在区域 Ω 内 $f(x)\leqslant$

0，则(5.12)的不恒等于常数的解不能在区域 Ω 内部取到非正的极小值.

由上述极值原理可知，当 $c_0(x)\leqslant 0$ 时，方程 $Lu=0$ 的解在 $\bar{\Omega}$ 上的极大值及极小值都在边界 Γ 上取到，从而容易推得方程(5.12)的狄利克雷问题解的唯一性与稳定性.

定理 5.2 设条件(5.13)成立，且 $c_0(x)\leqslant 0$. 若在区域 Ω 内 $f(x)\geqslant 0$，且方程(5.12)的不恒等于常数的解 $u(x)$ 在 Ω 的边界点 x_0 上取非负的极大值，而 x_0 位于 Γ 的光滑片上，则必成立

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0)>0, \tag{5.19}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为区域 Ω 在 x_0 点的单位外法线向量. 类似地，若在 Ω 内 $f(x)\leqslant 0$，且不恒等于常数的解 $u(x)$ 在 Ω 的边界点 x_0 取非正的极小值，则必成立

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0)<0.$$

由定理 5.2 可知，当 $c_0(x)\leqslant 0$ 时，方程 $Lu=0$ 的不恒等于常数的解在边界上取非负极大值的点，其外法向导数必为正值；而在边界上取非正极小值的点，其外法向导数必为负值. 由此就可推得方程(5.12)的第三类边值问题的解的唯一性与稳定性. 对于第二类边值问题及等值面边值问题，在 $c_0(x)$ 不恒为零时仍有解的唯一性与稳定性；但当 $c_0(x)$ 恒等于零时，其解在允许相差一个任意常数的意义下才是唯一的.

特别需要注意，当 $c_0(x)>0$ 时，定理 5.1 及 5.2 一般都不成立. 例如对于方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2u=0, \tag{5.20}$$

易知 $u(x, y)=\sin x\sin y$ 是它在矩形区域 $[0, \pi; 0, \pi]$ 中的解. 这个解满足齐次狄利克雷条件，但在区域内部达到极大值，且显然不恒等于常数.

有关解的存在性的讨论也与 $c_0(x)$ 的大小很有关系，我们在此仅列出下述结果，而不加证明.

定理 5.3　设 Γ 适当光滑，且 $f(x)\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$（即满足指数为 $\alpha(0<\alpha<1)$ 的霍尔德尔（Hölder）连续性条件），则对于方程(5.12)左端所定义的二阶椭圆算子 L，必可以找到一个常数 λ_0，使当 $\lambda<\lambda_0$ 时，狄利克雷问题

$$\begin{cases} Lu+\lambda u=f, \\ u|_{\Gamma}=0 \end{cases} \tag{5.21}$$

有解 $u\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$，即 u 的一切二阶偏导数均具有指数为 α 的霍尔德尔连续性.

当 f 的光滑性改变时，也有相应的存在性定理，其中解 u 的光滑性随 f 的光滑性不同而不同，在此不详述.

定理 5.3 说明，当 $c_0(x)$ 足够负时，方程(5.12)的齐次狄利克雷问题的解存在．那么当 $c_0(x)$ 不是足够负时，关于解的存在性有什么结论呢？按定理 5.3 的形式来说明这个问题，其结论是：存在可列个 λ_i 值$(i=1, 2, \cdots)$，使得 λ 除了取这可列个值以外，问题(5.21)的解均是存在且唯一的；而当 λ 取这些值时，(5.21)中方程右端的函数 f 必须满足有限个附加条件，才能使该问题可解．这个事实称为*弗雷德霍姆*(Fredholm)*二择性定理*.

我们最后简略地说及关于椭圆型方程解的光滑性的结果．在第四章中我们已经知道调和函数具有很好的光滑性，即它在区域内部处处是解析函数．对于一般的二阶椭圆型方程，也有类似的结论：若椭圆型方程(5.12)中的系数及右端项 f 均为 C^{∞} 函数，则如果 $u(x)$ 是这个方程在区域 Ω 中的解，它必定也是一个 C^{∞} 函数；又如果(5.12)中的系数及右端须 f 均为解析函数，则 $u(x)$ 也在区域 Ω 的每一内点解析.

5.3　二阶抛物型方程小结

二阶线性抛物型方程的一般形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-Lu=f(x, t), \tag{5.22}$$

式中 L 为由(5.12)式左端所定义的椭圆型算子，其中的系数仍满

足上段中所列出的条件.

抛物型方程的定解问题一般有两类. 一类是柯西问题, 即在平面 $t=0$ 上给定初始条件

$$t=0:\ u=\varphi, \tag{5.23}$$

要求在半空间 $t>0$ 中方程(5.22)的解. 另一类是混合问题, 即在柱形区域 $Q=\Omega\times(0,T)$(其侧面为 $\Sigma=\Gamma\times(0,T)$)上给定如下的定解条件:

$$t=0:\ u=\varphi\quad(x\in\Omega), \tag{5.24}$$

$$u|_{\Sigma}=g, \tag{5.25}$$

要求方程(5.22)在 Q 中的解. 其中(5.25)是在侧边上给出的狄利克雷条件, 它也可以用诺伊曼条件或第三类边界条件等来代替.

关于抛物型方程的混合问题我们有

定理 5.4(极值原理) 设 $c_0(x)\leqslant 0$, 若在 Q 中成立 $\dfrac{\partial u}{\partial t}-Lu\leqslant 0\left(\text{或}\ \dfrac{\partial u}{\partial t}-Lu\geqslant 0\right)$, 且 u 在 (x_0, t_0) 点取正的极大值(或负的极小值), 其中 x_0 为 Ω 的一个内点, $t_0>0$, 则对区域 Q 中一切满足条件 $t\leqslant t_0$ 的点 (x, t), 都成立 $u(x,t)\equiv u(x_0,t_0)$.

由此可以得到

定理 5.5 混合问题(5.22)、(5.24)及(5.25)的解是唯一的, 且关于初、边值条件是稳定的.

事实上, 若 $c_0(x)\leqslant 0$, 则所需结论不难由定理 5.4 直接推得. 若条件 $c_0(x)\leqslant 0$ 不成立, 可先作未知函数变换 $u=ve^{\alpha t}$, 其中 α 为一个待定常数. 此时方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}-Lu=0$ 化成 $\dfrac{\partial v}{\partial t}-(L-\alpha)v=0$. 因此只要取 α 充分大, 就可化到 $c_0(x)\leqslant 0$ 的情形. 这就证明了定理 5.5.

和热传导方程的情形类似, 为得到柯西问题解的唯一性与稳定性, 必须对解在 $x\to\pm\infty$ 时的增长性加以一定的限制. 如果我们在有界函数类中考虑问题, 就能够得到方程(5.22)的柯西问题的解的唯一性与稳定性(此时自然要求初值本身也是有界的). 这里

关于解是有界的限制还可以放松为如下的条件：对任何 $T>0$，存在仅与 T 有关的正常数 $M=M(T)$ 及 $C=C(T)$，使在区域 $0\leqslant t\leqslant T$，$-\infty<x<\infty$ 上成立

$$|u(x,\ t)|\leqslant Me^{c|x|^2}. \tag{5.26}$$

现在考虑混合问题(5.22)、(5.24)及(5.25)的解的存在性问题。如果(5.24)及(5.25)均为齐次条件，又出现在方程(5.22)中的系数与右端项以及 Ω 的边界 Γ 均足够光滑，则该混合问题存在经典解。在(5.24)及(5.25)为非齐次时，只要 $\varphi(x)$ 与 $g(t,\ x)$ 足够光滑，且在 $t=0$，$x\in\Gamma$ 处满足一定的相容性条件，仍可以得到经典解。

关于抛物型方程(5.22)的柯西问题在假设初值 $\varphi(x)$ 与方程右端项 $f(t,\ x)$ 满足形如(5.26)的限制时，也能建立解的存在性。

抛物型方程的解的光滑性要比椭圆型方程差一些，对它的解通常只能建立 C^∞ 光滑性的结果。即若 u 为方程 (5.22) 的解，而(5.22)中的系数与右端项都是所给变量的 C^∞ 函数，则解 $u(x,\ t)$ 也是 (x,t) 的 C^∞ 函数。可是，当(5.22)中的系数与右端项都是所给变量的解析函数时，我们并不能肯定 $u(x,\ t)$ 一定是 $(x,\ t)$ 的解析函数。这一点从热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\\ t=0:\ u=\varphi\end{cases}$$

的解的表达式

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi \tag{5.27}$$

可以直接看出。此时方程的系数均为常数，自然是解析的，但解一般不是解析函数。

关于抛物型方程还有一个重要的性质，即它关于时间不是可逆的：对于方程(5.22)来说，若给定 u 在时刻 $t=t_0$ 之值 $u(x,\ t_0)$，只能求 $t>t_0$ 区域中的解 $u(x,\ t)$，而不能求得 $t<t_0$ 区域中的解。在热传导方程或扩散方程的情形，这一现象就反映了热传导过程

或扩散过程的不可逆性．注意到在变换 $t=-t'$ 下，方程(5.22)变为

$$\frac{\partial u}{\partial t'}+Lu=-\tilde{f}(x,\ t'),\tag{5.28}$$

其中 $\tilde{f}(x,\ t')=f(x,\ t)$，上述抛物型方程关于时间的不可逆性就表现为对于向上(按 t 增加的方向)求解的问题，方程(5.22)中算子 L 前的符号不能改为正号，否则所求解的问题将是不适定的．这点需要特别加以注意．

在算子 L 中的系数也与 t 有关的情形，可以类似地进行讨论．

5.4　二阶双曲型方程小结

考虑如下形式的二阶线性双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-Lu=f(x,\ t),\tag{5.29}$$

其中 L 仍为由(5.12)式左端所定义的椭圆型算子，并满足那儿所述的一切条件．

与抛物型方程类似，双曲型方程(5.29)的定解问题最常见的也是两类．一类是柯西问题，即在平面 $t=0$ 上给定初始条件

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=\psi(x),\tag{5.30}$$

要在半空间 $t>0$ 中求方程(5.29)的解．这里需注意，与二阶抛物型方程的情形不同，对二阶双曲型方程，其初始条件必须有两个．另一类常见的定解问题是在柱形区域 $Q=\Omega\times(0,\ T)$ 上给定如下的定解条件

$$t=0:\ \ u=\varphi,\ \frac{\partial u}{\partial t}=\psi\quad(x\in\Omega),\tag{5.31}$$

$$u|_{\Sigma}=g,\tag{5.32}$$

其中侧边 $\Sigma=\Gamma\times(0,\ T)$ 上的边界条件(5.32)也可以替换成诺伊曼条件或第三类边界条件等．

对于双曲型方程的解一般不成立极值原理，这可从弦振动方

程的达朗贝尔公式中很容易地看出.

为证明双曲型方程的解的唯一性与稳定性，其主要工具是能量不等式. 如本章§2中所述，若引入能量积分

$$E(t)=\int_{\Omega}\left(u_t^2+\sum_{i,j=1}^{n}u_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\right)dx,$$

则混合问题(5.29)、(5.31)及(5.32)(其中 $g\equiv 0$)的解满足如下的能量不等式

$$E(t)\leqslant C(t)\left(E(0)+\int_0^t\int_{\Omega}f^2(x,\ \tau)\,dx\,d\tau\right),\qquad(5.33)$$

其中 $E(0)$ 可以由 φ 及 ψ 唯一决定. 由此立刻可得混合问题解的唯一性与解关于初始条件及方程右端项的稳定性.

对于柯西问题，记 Q 为以上半空间中任一点 $P_0(t^0,\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0)$ 为顶点向下作出的圆锥体，其半顶角 θ 满足条件

$$\operatorname{tg}^2\theta>\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}u_{ij}^2(x,\ t)\quad(j=1,\ \cdots,\ n),$$

其中 α 为(2.2)中出现的常数，并记 Q 与平面 $t=$常数的截口为 $\Omega(t)$. 令

$$E(t)=\int_{\Omega(t)}\left(u_t^2+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\right)dx,$$

则柯西问题(5.29)～(5.30)的解满足如下的能量不等式

$$E(t)\leqslant C(t)\left(E(0)+\int_0^t\int_{\Omega(t)}f^2(x,\ \tau)\,dx\,d\tau\right)\quad(t\leqslant t^0),\qquad(5.34)$$

由此也可得柯西问题解的唯一性与稳定性.

对双曲型方程(5.29)的柯西问题，只要初值充分光滑，其解必存在. 对双曲型方程(5.29)的混合问题，当初值与边值充分光滑，并在 $x\in\Gamma$, $t=0$ 处满足适当的相容性条件时，其解也存在.

对于双曲型方程来说，其解的光滑性不仅与方程系数及右端项的光滑性有关，而且与初值的光滑性有关. 这一点由弦振动方程的达朗贝尔公式就可以看出. 事实上，在那儿如取初始条件为 $u(x,\ 0)=\varphi(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=0$，其中 $\varphi(x)$ 二阶连续可微，但三阶导数

不存在，则方程的解也只是二阶连续可微函数，不存在三阶偏导数.这一点与椭圆型方程及抛物型方程的情形都有很大的不同.这是由于双曲型方程一般描述了波的传播现象，而在波的传播过程中可以将解在初始时刻的非光滑性传播开去.

在双曲型方程的研究中，影响区域与依赖区域的概念是十分重要的. 以二维与三维波动方程为例，一点的影响区域是以此点为顶点向上作出的特征锥(在三维时为特征锥面)，于是波传播的速度 $a=\operatorname{tg}\alpha$，其中 α 为特征锥的半顶角；一点的依赖区域就是以此点为顶点向下作出的特征锥与平面 $t=0$ 所交的圆域（在三维时为球面）. 对一般的二阶双曲型方程，从能量不等式(5.34)可知，点 $P_0(x^0, t^0)$ 的依赖区域必包含于区域 $\Omega(0)$ 中.

影响区域与依赖区域的有界性也表明双曲型方程反映了具有有限传播速度的波的传播过程. 对于抛物型方程与椭圆型方程来说就不是这样. 如对热传导方程，从其柯西问题解的泊松公式可见. 初始平面上任一点的影响区域都是整个上半空间，因为上半空间中任一点都会受到该点扰动的影响；反之，一点的依赖区域就是整个初始平面 $t=0$. 又如对调和方程，从圆（或球）上狄利克雷问题解的泊松公式也易知，边界条件在边界上任何一点处的微小扰动都将影响到整个区域内解的数值.

最后，我们再指出双曲型方程的一个与抛物型方程不相同的性质，即双曲型方程关于时间是可逆的. 作变换 $t=-t'$，方程(5.29)变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t'^2}-Lu=f(x, -t'), \tag{5.35}$$

它与方程(5.29)具有同样的形式. 而对(5.35)向 t' 增加的方向解柯西问题(或混合问题)恰相当于对(5.29)向 t 减少的方向求解相应的问题. 双曲型方程关于时间 t 的可逆性也反映了物理上线性波的传播过程是一个可逆过程.

在算子 L 中的系数也与 t 有关的情形，可以得到类似的结果.

习 题

1．举例说明调和方程的柯西问题是不稳定的．

2．证明定理5.1．

3．证明定理5.2，并由此证明二阶椭圆型方程第三类边值问题的解的唯一性．

4．证明定理5.4．

5．对热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ t=0:\ \ u=\varphi, \\ x=0\ \text{及}\ x=l:\ u=0, \end{cases}$$

证明其解 $u=u(x,\ t)$ 在区域 $\{0\leqslant x\leqslant l,\ t>0\}$ 上关于自变量 x 及 t 可以任意次求导．

6．证明下述柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad (t>0,\ a\ \text{为常数}), \\ t=0:\ \ u=\varphi(x) \end{cases}$$

是不适定的．

7．举例说对弦振动方程不成立极值原理．

8．利用调和方程在圆上的狄利克雷问题解的泊松公式，指出圆内任意一点的依赖区域是整个圆周．

第六章

一阶对称双曲型方程组

本章介绍一类无论在理论上还是在应用上都很重要的偏微分方程组——一阶对称双曲型方程组(简称一阶对称双曲组). 许多数学物理方程(组)都可以化为一阶对称双曲组. 讨论一阶对称双曲组的主要手段——能量积分方法在双曲型方程以及其它一些类型方程的研究中也具有普遍的意义. 弗里德里克斯(K. O. Friedrichs)最早对于一阶线性对称双曲组给予系统的研究, 并给出了这类方程组边值问题的一般提法. 为叙述简单起见, 本章在前四节中着重就常系数的情形介绍有关的结果, 但不难看出, 对变系数的情形也可类似地进行讨论. 最后, 在§5中, 对拟线性的情形加以简单的说明.

§1 定义与例子

讨论如下的一阶线性偏微分方程组

$$Lu \equiv A_0\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+Bu=f, \tag{1.1}$$

其中未知函数 u 及右端 f 都是 $(x, t)=(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ 的 N 维列向量函数, $A_k(k=0, 1, \cdots, n)$ 与 B 是依赖于 (x, t) 的 $N\times N$ 阵.

定义 1.1 若 $A_k(k=1, \cdots, n)$ 是对称阵, A_0 是对称正定阵, 则称方程组(1.1)为一阶对称双曲组.

今后我们只着重讨论 $A_k(k=0, 1, \cdots, n)$ 与 B 是 $N\times N$ 常数元素矩阵的情形.

下面我们给出一些例子. 从这些例子可以看出, 几乎所有在数学物理中常见的双曲型方程(组)都可以化为一阶对称双曲组.

【例1.1】 麦克斯韦尔(Maxwell)方程组.

在电磁波理论中，对各向同性的均匀介质成立如下的麦克斯韦尔方程组:

$$\begin{cases} \varepsilon \boldsymbol{E}_t - c\,\mathrm{rot}\boldsymbol{H} + \lambda \boldsymbol{E} = 0, \\ \mu \boldsymbol{H}_t + c\,\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $\boldsymbol{E}=(e_1, e_2, e_3)$ 表示电场强度，$\boldsymbol{H}=(h_1, h_2, h_3)$ 表示磁场强度，c 为光速，λ 为介质的传导系数，ε 和 μ 分别为介电常数和导磁率. 将(1.2)写为分量的形式:

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial e_1}{\partial t} + c\left(\dfrac{\partial h_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial h_3}{\partial x_2}\right) + \lambda e_1 = 0, \\ \varepsilon \dfrac{\partial e_2}{\partial t} + c\left(\dfrac{\partial h_3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial h_1}{\partial x_3}\right) + \lambda e_2 = 0, \\ \varepsilon \dfrac{\partial e_3}{\partial t} + c\left(\dfrac{\partial h_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial h_2}{\partial x_1}\right) + \lambda e_3 = 0, \\ \mu \dfrac{\partial h_1}{\partial t} + c\left(\dfrac{\partial e_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial e_2}{\partial x_3}\right) = 0, \\ \mu \dfrac{\partial h_2}{\partial t} + c\left(\dfrac{\partial e_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial e_3}{\partial x_1}\right) = 0, \\ \mu \dfrac{\partial h_3}{\partial t} + c\left(\dfrac{\partial e_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial e_1}{\partial x_2}\right) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

易知方程组(1.3)是一个对称双曲组. 事实上，若记 $u=(e_1, e_2, e_3, h_1, h_2, h_3)^T$，其中右上角记号 T 表示向量的转置，则方程组(1.3)可以写为如下的形式:

$$A_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Bu = 0, \tag{1.4}$$

其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & & & & & \\ & \varepsilon & & & & \\ & & \varepsilon & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix},$$

$$A_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&c\\0&0&0&0&-c&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&-c&0&0&0\\0&c&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&-c\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&c&0&0\\0&0&c&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\-c&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&c&0\\0&0&0&-c&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&-c&0&0&0&0\\c&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

而空白处为零元素. 易见 A_0 为对称正定阵, $A_k(k=1, 2, 3)$ 为对称阵.

【例 1.2】 声学方程组.

由第三章 § 4, 当流体在平衡状态附近作非常微小的振动时(例如声音的传播), 流体动力学方程组可化为如下的一阶线性方程组(声学方程组):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_k}{\partial t}+\dfrac{p'(\rho_0)}{\rho_0}\dfrac{\partial \rho}{\partial x_k}=0 \quad (k=1, 2, 3),\\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\rho_0\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}=0.\end{cases}\tag{1.5}$$

将(1.5)的前三个方程两端乘以 ρ_0, 最后一个方程两端乘以 $p'(\rho_0)/\rho_0$, 就可将原方程组化为一个形如(1.1)的一阶对称双曲组, 其中 $u=(v_1, v_2, v_3, \rho)^T$,

$$A_0=\begin{bmatrix}\rho_0&&&\\&\rho_0&&\\&&\rho_0&\\&&&\dfrac{p'(\rho_0)}{\rho_0}\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}0&0&0&p'(\rho_0)\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\p'(\rho_0)&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&p'(\rho_0)\\0&0&0&0\\0&p'(\rho_0)&0&0\end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&p'(\rho_0)\\0&0&p'(\rho_0)&0\end{bmatrix},$$

$B=0$, $f=0$，而空白处为零元素。

【例 1.3】 高维波动方程.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-C^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}\right)=g(x,\ t). \tag{1.6}$$

为将方程(1.6)化为一阶方程组，引进新的未知函数 $u=(u_1,\ \cdots,\ u_{n+1})^T$ 如下：

$$u_k=\frac{\partial v}{\partial x_k}\quad (k=1,\ \cdots,\ n),\qquad u_{n+1}=\frac{\partial v}{\partial t}.$$

这样方程(1.6)可写为由如下的 $N=n+1$ 个方程所组成的一阶方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_k}{\partial t}-\dfrac{\partial u_{n+1}}{\partial x_k}=0\quad (k=1,\ \cdots,\ n),\\[2mm] \dfrac{\partial u_{n+1}}{\partial t}-C^2\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\cdots+\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)=g.\end{cases} \tag{1.7}$$

不难看出，上面的方程组不是对称的. 但用类似于上例的方法，将(1.7)的前 n 个方程两端乘以 C^2，就得到一个形如(1.1)的一阶对称双曲组，其中

$$A_0=\begin{bmatrix}C^2&&&\\&\ddots&&\\&&C^2&\\&&&1\end{bmatrix},$$

$$A_k=\begin{bmatrix}&&&\\&&&-C^2\\&&&\\&&-C^2&\end{bmatrix}\begin{matrix}\\(k\text{ 行})\\\\\\\end{matrix}\qquad (k=1,\ \cdots,\ n),$$

（k 列）

$$B=0,\quad f=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ g)^T,$$

而空白处为零元素.

【例 1.4】 弹性力学方程组.

对各向同性的均匀弹性体，讨论其位移所满足的方程组．为叙述简单起见，我们只就二维的情形进行讨论（对三维弹性体，可以类似地进行讨论）．此时以 y_1 及 y_2 表示位移分量，就成立如下的弹性力学方程组：

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}-(\lambda+\mu)\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)-\mu\,\Delta y_1=F_1, & (1.8)\\ \rho\dfrac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}-(\lambda+\mu)\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)-\mu\,\Delta y_2=F_2, & (1.9)\end{cases}$$

其中 ρ 为密度，F_1 及 F_2 表示体积力分量，λ 及 μ 为弹性体的拉梅(Lamé)常数．

引进新的未知函数：

$$u_1=\frac{\partial y_1}{\partial x_1},\quad u_2=\frac{\partial y_1}{\partial x_2},\quad u_3=\frac{\partial y_1}{\partial t},$$
$$u_4=\frac{\partial y_2}{\partial x_1},\quad u_5=\frac{\partial y_2}{\partial x_2},\quad u_6=\frac{\partial y_2}{\partial t},$$

那么方程组 (1.8)～(1.9) 可改写为如下等价的形式（其等价性需要在相应的初始条件下来证明，从略）：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}-\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}=0,\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}-\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}=0,\\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t}-(a+b)\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}-a\dfrac{\partial u_5}{\partial x_1}-b\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}=f_1,\\ \dfrac{\partial u_4}{\partial t}-\dfrac{\partial u_6}{\partial x_1}=0,\\ \dfrac{\partial u_5}{\partial t}-\dfrac{\partial u_6}{\partial x_2}=0,\\ \dfrac{\partial u_6}{\partial t}-b\dfrac{\partial u_4}{\partial x_1}-a\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}-(a+b)\dfrac{\partial u_5}{\partial x_2}=f_2, \end{cases}\tag{1.10}$$

这里我们记 $a=\dfrac{\lambda+\mu}{\rho}$，$b=\dfrac{\mu}{\rho}$ 及 $f_i=\dfrac{F_i}{\rho}(i=1, 2)$．上面的方程组虽然不是对称的，但仍可将它化为一个对称双曲组．为此将(1.10)改写为如下的形式：

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(a+b)\frac{\partial u_1}{\partial t}-(a+b)\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+a\frac{\partial u_5}{\partial t}-a\frac{\partial u_6}{\partial x_2}=0,\\
&b\frac{\partial u_2}{\partial t}-b\frac{\partial u_3}{\partial x_2}=0,\\
&\frac{\partial u_3}{\partial t}-(a+b)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-a\frac{\partial u_5}{\partial x_1}-b\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=f_1,\\
&b\frac{\partial u_4}{\partial t}-b\frac{\partial u_6}{\partial x_1}=0,\\
&(a+b)\frac{\partial u_5}{\partial t}-(a+b)\frac{\partial u_6}{\partial x_2}+a\frac{\partial u_1}{\partial t}-a\frac{\partial u_3}{\partial x_1}=0,\\
&\frac{\partial u_6}{\partial t}-b\frac{\partial u_4}{\partial x_1}-a\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-(a+b)\frac{\partial u_5}{\partial x_2}=f_2.
\end{aligned}
\right. \tag{1.11}
$$

由于 $a, b>0$, (1.11)与(1.10)显然等价. 将(1.11)写为矩阵的形式(1.1), 其中

$$
A_0=\begin{bmatrix}
(a+b) & 0 & 0 & 0 & a & 0\\
0 & b & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & b & 0 & 0\\
a & 0 & 0 & 0 & (a+b) & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix},
$$

$$
A_1=\begin{bmatrix}
0 & 0 & -(a+b) & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-(a+b) & 0 & 0 & 0 & -a & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b\\
0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0
\end{bmatrix},
$$

$$
A_2=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a\\
0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0\\
0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(a+b)\\
-a & 0 & 0 & 0 & -(a+b) & 0
\end{bmatrix},
$$

$$B=0,\ f=(0,\ 0,\ f_1,\ 0,\ 0,\ f_2)^T.$$

易见 A_0 是对称正定阵，而 A_1，A_2 为对称阵，所以(1.11)是一个对称双曲组.

习 题

1. 设一个空间变数的常系数一阶方程组

$$\frac{\partial v}{\partial t}+A\frac{\partial v}{\partial x}+Bv=f(x,\ t)$$

在下述意义下是双曲型：矩阵 A 的 N 个特征值 λ_1, …, λ_N 都是实数，相应于这 N 个特征值有 N 个线性无关的左特征向量

$$\zeta^k=(\zeta_1^k,\ \cdots,\ \zeta_N^k)\quad (k=1,\ \cdots,\ N).$$

试证明这个方程组一定可以通过未知函数的线性变换化为一阶对称双曲组.

2. 给定常系数二阶双曲型方程

$$v_{tt}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}v_{x_ix_j}+\sum_{j=1}^{n}b_jv_{x_j}+b_0v_t+cv=f(x,\ t),$$

其中(a_{ij})是对称正定阵. 试将上方程化为一阶对称双曲型方程组.

3. 给定常系数对称双曲组

$$A_0\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+Bu=f(x,\ t),$$

试证明总可以通过适当的未知函数变换将它化为首项系数为单位阵的一阶对称双曲组.

§2 能量积分与柯西问题解的唯一性

这一节我们讨论一阶对称双曲组的柯西问题：

$$\begin{cases} Lu\equiv A_0\dfrac{\partial u}{\partial t}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+Bu=f(x,\ t), & (2.1)\\ t=0:\ u=u_0(x). & (2.2)\end{cases}$$

对这个问题，我们首先利用类似于第三章 §7 中的方法建立相应的能量不等式，然后利用能量不等式导出柯西问题(2.1)～(2.2)解的唯一性. 为此，先介绍类空曲面的概念.

定义 2.1 对一曲面

$$S:\ t=\varphi(x),\tag{2.3}$$

若矩阵

$$A_0-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}A_k \tag{2.4}$$

在 S 上是正定的，则称曲面 S 关于算子 L 是类空的. 若矩阵(2.4)在 S 上是半正定的，则称 S 关于算子 L 是弱类空的.

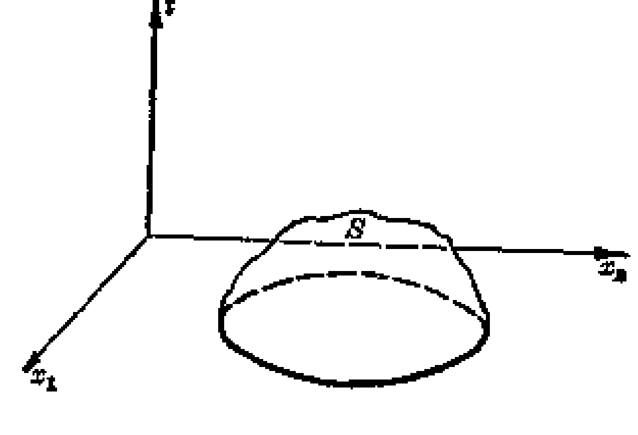


图 6.1

因为 A_0 为正定，显然超平面 $t=$ 常数是类空曲面.

现在对柯西问题(2.1)～(2.2)来导出相应的能量估计.

设 Q 为由初始平面 $t=0$ 与一个弱类空曲面 S 所围成的透镜形区域(见图 6.1)：

$$Q=\{(x,\ t)\,|\,0\leqslant t\leqslant\varphi(x),\ \varphi(x)\geqslant 0\},$$

在 Q 中考察方程组(2.1).

以 u 的转置 u^T 左乘方程组(2.1)，得

$$u^TA_0\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}u^TA_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+u^TBu=u^Tf. \tag{2.5}$$

因为 $A_k(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 都是常数元素的对称阵，所以

$$\frac{\partial}{\partial t}(u^TA_0u)=\frac{\partial u^T}{\partial t}A_0u+u^TA_0\frac{\partial u}{\partial t}=2u^TA_0\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{2.6}$$

类似地

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(u^TA_ku)=2u^TA_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{2.7}$$

由于(2.6)与(2.7)，(2.5)式可以改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(u^TA_0u)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(u^TA_ku)+2u^TBu=2u^Tf. \tag{2.8}$$

我们暂且假定矩阵 B 在 Q 上是正定的(下面我们将看到，这一点总是可以作到的)，即在 Q 上成立

$$u^TBu\geqslant C_1|u|^2, \tag{2.9}$$

这里 $|u|^2=\sum_{i=1}^{N}u_i^2$，$C_1$ 是一个正常数.

在 Q 中积分(2.8)式得

$$\int_Q\left[\frac{\partial}{\partial t}(u^TA_0u)+\sum_{k=1}^n\frac{\partial}{\partial x_k}(u^TA_ku)\right]dx\,dt+2\int_Q u^TBu\,dx\,dt$$
$$=\int_Q 2u^Tf\,dx\,dt, \tag{2.10}$$

其中 $dx=dx_1\cdots dx_n$. 利用格林公式,可将上式右端第一个积分改写为

$$-\int_\Omega u^TA_0u\,dx+\int_S\left[u^TA_0u\cos(\boldsymbol{n},\ t)+\sum_{k=1}^n u^TA_ku\cos(\boldsymbol{n},\ x_k)\right]dS$$
$$=-\int_\Omega u^TA_0u\,dx+\int_S\lambda u^T\left(A_0-\sum_{k=1}^n A_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)u\,dS, \tag{2.11}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 表示 S 的外法线向量, $\Omega=\{(t,\ x)\,|\,\varphi(x)\geqslant0,\ t=0\}$是透镜形区域 Q 的底面,而 $\lambda=\left[1+\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}>0$.

由关于 S 为弱类空曲面的假设,有

$$\int_S\lambda u^T\left(A_0-\sum_{k=1}^n A_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)u\,dS\geqslant0. \tag{2.12}$$

由关于 B 的正定性假设(2.9),有

$$\int_Q u^TBu\,dx\,dt\geqslant C_1\|u\|^2_{L^2(Q)}, \tag{2.13}$$

其中 $\|u\|^2_{L^2(Q)}=\int_Q|u|^2\,dx\,dt$. 又显然有

$$\left|\int_\Omega u^TA_0u\,dx\right|\leqslant C_2\int_\Omega|u(x,\ 0)|^2\,dx, \tag{2.14}$$

其中 C_2 为一正常数;再将如下简单的不等式:

$$|2u^Tf|\leqslant C_1|u|^2+C_1^{-1}|f|^2$$

应用于(2.10)右端的积分,可得

$$\left|\int_Q 2u^Tf\,dx\,dt\right|\leqslant C_1\|u\|^2_{L^2(Q)}+C_1^{-1}\|f\|^2_{L^2(Q)}. \tag{2.15}$$

利用上面的估计,不难证明下述的

定理 2.1　设 Q 是由 $t=0$ 与弱类空曲面 S 所围成的透镜形区域, $u=u(x,\ t)$是方程组(2.1)的解, 那么成立如下的能量不等式:

$$\|u\|^2_{L^2(Q)} \leqslant C\left(\iint_{\Omega} |u(x, 0)|^2 dx + \|f\|^2_{L^2(Q)}\right), \tag{2.16}$$

其中 C 是一个正常数.

证明 如果矩阵 B 满足正定性条件(2.9), 那么由(2.10)式并注意到(2.11)～(2.15), 就可得到

$$2C_1\|u\|^2_{L^2(Q)} \leqslant C_2\int_{\Omega} |u(x, 0)|^2 dx + C_1\|u\|^2_{L^2(Q)} + C_1^{-1}\|f\|^2_{L^2(Q)},$$

由此立即得估计式(2.16).

若 B 不满足正定性条件(2.9), 代替 u, 引入新的未知函数

$$v = e^{-\mu t}u, \tag{2.17}$$

其中 μ 是一待定的正常数. 易知 v 满足如下方程

$$A_0\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial v}{\partial x_k} + (B + \mu A_0)v = e^{-\mu t}f. \tag{2.18}$$

对这个方程来说, 其低阶项的系数阵为

$$B + \mu A_0. \tag{2.19}$$

由于 A_0 的正定性, 只要取 μ 充分大, 总可以使矩阵(2.19)成为正定矩阵. 这样由上一段的结果就得到

$$\|v\|^2_{L^2(Q)} \leqslant C\left(\iint_{\Omega} |v(x, 0)|^2 dx + \|e^{-\mu t}f\|^2_{L^2(Q)}\right). \tag{2.20}$$

注意到 $v(x, 0) = u(x, 0)$, $|e^{-\mu t}f| \leqslant |f|$, 且在 Q 上成立 $|u| \leqslant C_3|v|$, 其中 C_3 为一个正常数, 由(2.20)立即得(2.16)式. 定理证毕.

由定理 2.1 可得如下的

定理 2.2 设 $u(x, t)$ 是柯西问题(2.1)～(2.2)的解, 则存在一个常数 $a>0$, 使对 (x, t) 空间任一点 (x^0, t^0) $(t^0>0)$, u 在 (x^0, t^0) 处的值由 f 在锥形域

$$Q_a = \{(x, t) \mid 0 \leqslant t \leqslant t^0, \ |x - x^0| \leqslant a(t^0 - t)\}$$

上的值以及 u_0 在 Q_a 的底面

$$\Omega_a = \{(x, 0) \mid |x - x^0| \leqslant at^0\}$$

上的值唯一确定. 特别当 $u_0(x)$ 在 Ω_a 及 f 在 Q_a 中均为零时, u 在

Q_a 中恒为零.

证明 锥形域 Q_a 的锥表面方程可写为

$$t=t^0-a^{-1}|x-x^0|,$$

其法线方向为

$$\left(1,\ \frac{x_1-x_1^0}{a|x-x^0|},\ \cdots,\ \frac{x_n-x_n^0}{a|x-x^0|}\right).$$

考察矩阵

$$A_0+a^{-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k-x_k^0}{|x-x^0|}A_k. \tag{2.21}$$

由于 A_0 的正定性,不难看出,只要取 a 充分大,就能使矩阵(2.21)是半正定的. 对这样选取的 a, 锥形域 Q_a 的锥表面是弱类空的,因此在 Q_a 上成立能量不等式(2.16),即

$$\|u\|^2_{L^2(Q_a)}\leqslant C\left(\iint\limits_{\Omega}|u_0(x)|^2dx+\|f\|^2_{L^2(Q_a)}\right).$$

特别当在 Q_a 中 $f\equiv0$, 在 Ω_a 中 $u_0\equiv0$ 时,由上式知

$$\|u\|^2_{L^2(Q_a)}=0. \tag{2.22}$$

根据 u 的连续性及 $u(x, 0)\equiv0$, 由上式立得在 Q_a 中

$$u\equiv0.$$

定理证毕.

由定理 2.2 立得

推论 2.1 柯西问题(2.1)～(2.2)的解是唯一的.

由定理 2.2 可以看出, 柯西问题 (2.1)～(2.2) 的解在点 (x^0, t^0)处的值完全由 f 在 Q_a 上的值与 u_0 在 Ω_a 上的值确定,与 f 及 u_0 在 Q_a 外的值无关. 这说明了一阶线性对称双曲组与波动方程一样,具有有限的依赖区域,它同样反映了波以有限速度传播的这一事实.

【例 2.1】 考察三维波动方程的柯西问题:

$$\begin{cases}\Box v\equiv\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-c^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_3^2}\right)=0, & (2.23)\\ t=0:\ v=\varphi(x),\ v_t=\psi(x). & (2.24)\end{cases}$$

如同在例 1.3 中那样,令

$$u_k=\frac{\partial v}{\partial x_k}\quad(k=1,\ 2,\ 3),\quad u_4=\frac{\partial v}{\partial t},$$

可将柯西问题(2.23)～(2.24)等价地化为

$$\begin{cases}A_0\dfrac{\partial u}{\partial t}+\sum\limits_{k=1}^{3}A_k\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=0, & (2.25)\\ t=0:\ u=u_0(x), & (2.26)\end{cases}$$

其中 A_0, A_1, A_2 及 A_3 见§1例1.3，而 $u_0(x)=(\varphi_{x_1},\ \varphi_{x_2},\ \varphi_{x_3},\psi)$. 此时相应于(2.21)的矩阵为

$$A_0+a^{-1}\sum_{k=1}^{3}\frac{x_k-x_k^0}{|x-x^0|}A_k$$

$$=\begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & -\dfrac{c^2(x_1-x_1^0)}{a|x-x^0|}\\ 0 & c^2 & 0 & -\dfrac{c^2(x_2-x_2^0)}{a|x-x^0|}\\ 0 & 0 & c^2 & -\dfrac{c^2(x_3-x_3^0)}{a|x-x^0|}\\ -\dfrac{c^2(x_1-x_1^0)}{a|x-x^0|} & -\dfrac{c^2(x_2-x_2^0)}{a|x-x^0|} & -\dfrac{c^2(x_3-x_3^0)}{a|x-x^0|} & 1\end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

不难验证，只要 $a\geqslant c$，就足以保证矩阵(2.27)是半正定的。特别取 $a=c$，那么锥形域 Q_a 就是

$$Q_a:\ |x-x^0|\leqslant c(t^0-t),$$

相应的锥表面就是波动方程(2.23)的特征锥面.

由定理2.1中的能量不等式(2.16)式知，此时

$$\|u\|^2_{L^2(Q_a)}\leqslant C\int_{|x-x^0|\leqslant ct^0}|u(x,\ 0)|^2dx,$$

即
$$\int_{Q_a}\left(v_t^2+\sum_{k=1}^{3}v_{x_k}^2\right)dx\leqslant C\int_{|x-x^0|\leqslant ct^0}\left(\psi^2+\sum_{k=1}^{3}\varphi_{x_k}^2\right)dx.$$

这与第四章§7中得到的关于波动方程的能量不等式在实质上是一致的.

习　题

1. 设 Ω 为由超平面 $t=0$ 与 $t=T$ 所围成的无界区域. 并设 $u\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$，且对每 $t\in[0,\ T]$，$u(x,\ t)$ 关于 x 具有紧支集. 试证，对一阶对称双曲算子

$$Lu\equiv A_0\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+Bu,$$

成立如下的能量不等式：

$$\|u(t)\|^2_{L^2(R^n)}\leqslant C\left(\|u(0)\|^2_{L^2(R^n)}+\int_0^t\|Lu(\tau)\|^2_{L^2(R^n)}d\tau\right),\quad t\in[0,\ T],$$

其中 C 为一正常数，而 $u(t)$ 简记 $u(x,\ t)$ 等.

2. 设

$$S_\mu:\ t=\mu\varphi(x),\ 0\leqslant\mu\leqslant 1$$

是一族具有公共边界 $\{t=0,\ \varphi(x)=0\}$ 的曲面，它们关于一阶对称双曲组

$$Lu=A_0\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^n A_k\frac{\partial u}{\partial x_k}$$

均是类空的，且其中每两张曲面都围成一个透镜形区域. 记

$$A(\mu)=\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2\sum\limits_{k=1}^n\varphi^2_{x_k}}}\left(A_0-\sum_{k=1}^n\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}A_k\right).$$

设 u 为方程 $Lu=0$ 的解，定义能量积分

$$E(\mu)=\int_{S_\mu}u^TA(\mu)u\,dS\quad(0\leqslant\mu\leqslant 1),$$

证明

$$\frac{dE(\mu)}{d\mu}=0\quad(0\leqslant\mu\leqslant 1).$$

§3 柯西问题解的存在性

现在我们来讨论柯西问题(2.1)～(2.2)的解的存在性. 虽然本节所得的结果对一般形式的方程组(2.1)也成立，但为了使证明过程尽可能地简单，我们只考虑一种重要的特殊情况：设方程组(2.1)的系数阵为常数元素矩阵，且低阶项系数阵 $B=0$. 在§1中讨论过的四个例子中的后三个均属于这种情况. 另外不妨设 $A_0=I$ (单位阵)(见本章§1的习题3)，即讨论下述柯西问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\sum\limits_{k=1}^n A_k\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=f(x,\ t), & (3.1)\\ t=0:\ u=u_0(x). & (3.2)\end{cases}$$

为了求解问题(3.1)～(3.2)，与过去求解非齐次波动方程及热传导方程的情况一样，利用齐次化原理，只要讨论相应的齐次方程组的柯西问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\sum\limits_{k=1}^n A_k\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=0, & (3.3)\\ t=0:\ u=u_0(x). & (3.2)\end{cases}$$

由于方程组(3.3)的系数阵的元素为常数，可以采用第二章中求解热传导方程柯西问题时用过的傅立叶变换方法来求解问题(3.3)、(3.2)。

将(3.3)与(3.2)的两端关于 x 施行傅立叶变换，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}+\left(i\sum_{k=1}^{n}\xi_k A_k\right)u=0, & (3.4)\\ t=0:\ \hat{u}=\hat{u}_0(\xi), & (3.5)\end{cases}$$

其中 $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_k)$ 表示变量 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 经傅立叶变换后的对偶变量，$\hat{u}$ 表示 u 关于变量 x 的傅立叶变换：

$$\hat{u}(\xi, t)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} e^{-ix\cdot\xi}u(x, t)dx, \tag{3.6}$$

其中 $x\cdot\xi=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n$，而一个向量函数的傅立叶变换指的是对其每个分量施行傅立叶变换后所得的向量.

(3.4)～(3.5)是一个常系数的一阶线性常微分方程组的柯西问题. 由常微分方程理论知其解为

$$\hat{u}(\xi, t)=e^{iA(\xi)t}\hat{u}_0(\xi), \tag{3.7}$$

其中

$$A(\xi)=-\sum_{k=1}^{n}A_k\xi_k, \tag{3.8}$$

而矩阵的指数函数 $e^{iA(\xi)t}$ 的定义为

$$e^{iA(\xi)t}=\lim_{k\to\infty}\left(I+iA(\xi)t+\cdots+\frac{1}{k!}(iA(\xi)t)^k\right). \tag{3.9}$$

将由(3.7)式给出的 $\hat{u}(\xi, t)$ 关于 ξ 进行傅立叶逆变换，就得到了柯西问题(3.3)、(3.2)的形式解

$$u(x, t)=\int_{R^n} e^{ix\cdot\xi}e^{iA(\xi)t}\hat{u}_0(\xi)d\xi. \tag{3.10}$$

为了说明由上式给出的 $u(x, t)$ 确为问题(3.3)、(3.2)的解，只要证明(3.10)右端的积分以及由它在积分号下关于 x 及 t 分别求导一次后所得的积分在 (x, t) 空间的一定范围内是一致收敛的. 为此，我们先估计 $e^{iA(\xi)t}$.

引理 3.1 存在常数 $C_1>0$，使

$$|e^{iA(\xi)t}|\leqslant C_1 \quad \forall\xi\in R^n, \tag{3.11}$$

即对矩阵 $e^{iA(\xi)t}$ 的每一个元素均成立如上的估计.

证明 因为 $A_k(k=1,\cdots,n)$ 是对称阵，所以 $A(\xi)$ 也是对称阵，其特征值均为实数，设为 $\lambda_1(\xi),\cdots,\lambda_N(\xi)$. 因为对称阵可在正交变换下化为对角阵，故存在正交阵 $U(\xi)$，使

$$A(\xi)=U(\xi)\Lambda(\xi)U^{-1}(\xi),$$

其中 $\Lambda(\xi)=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$. 于是，我们有(由(3.9)式也不难直接验证)

$$e^{iA(\xi)t}=U(\xi)e^{i\Lambda(\xi)t}U^{-1}(\xi), \tag{3.12}$$

其中 $e^{i\Lambda(\xi)t}=\mathrm{diag}(e^{i\lambda_1 t},\cdots,e^{i\lambda_N t})$. 因为 $U(\xi)$ 是正交阵，所以 $U(\xi)$ 与 $U^{-1}(\xi)$ 对 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 是一致有界的(这里说一矩阵有界，意即它的每一元素有界，下同). 又因为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_N$ 均为实数，所以 $e^{i\Lambda(\xi)t}$ 也对 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 一致有界. 这样就得到了矩阵 $e^{iA(\xi)t}$ 关于 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 的一致有界性，即(3.11)成立.

引理 3.2 设 $u\in C_0^s(R^n)$，那么

$$|\hat{u}(\xi)|\leqslant M_s(1+|\xi|)^{-s}, \tag{3.13}$$

其中 M_s 为一个与 s 有关的正常数，而 $C_0^s(R^n)$ 表示 R^n 中 S 次连续可微并且具有紧支集的函数的全体.

证明 根据傅立叶变换的性质有

$$\widehat{\partial_x^\alpha u}(\xi)=(i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi),\quad |\alpha|\leqslant S, \tag{3.14}$$

其中
$$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\quad \partial_x^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},$$
$$(i\xi)^\alpha=(i\xi_1)^{\alpha_1}\cdots(i\xi_n)^{\alpha_n},$$

而 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$. 又显然有

$$|\xi|=\sqrt{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2}\leqslant\sqrt{n}\max_j|\xi_j|,$$

并注意到 $\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}=2^s$，所以

$$(1+|\xi|)^s=\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}|\xi|^k\leqslant 2^s\sum_{k=0}^{s}n^{\frac{k}{2}}(\max_j|\xi_j|)^k$$
$$\leqslant 2^s n^{\frac{s}{2}}\sum_{|\alpha|\leqslant s}|\xi|^\alpha, \tag{3.15}$$

其中 $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$.

由(3.14)及(3.15)式，有

$$(1+|\xi|)^s|\hat{u}(\xi)|\leqslant 2^s n^{\frac{s}{2}}\sum_{|\alpha|\leqslant s}|(i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi)|$$

$$=2^s n^{\frac{s}{2}}\sum_{|\alpha|\leqslant s}|\widehat{\partial_x^\alpha u}(\xi)|. \tag{3.16}$$

由傅立叶变换的定义，有

$$|\widehat{\partial_x^\alpha u}(\xi)|=\frac{1}{(2\pi)^n}\left|\int_{R^n}e^{-ix\cdot\xi}\partial_x^\alpha u(x)dx\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}|\partial_x^\alpha u(x)|dx,\quad |\alpha|\leqslant s. \tag{3.17}$$

这里因为 $u\in C_0^s(R^n)$，所以(3.17)右端的积分存在．由(3.16)～(3.17)式立刻得到估计(3.13)．引理证毕．

利用上述两个引理，就可从形式解(3.10)出发，证明柯西问题(3.8)、(3.2)解的存在性．

定理 3.1 设 $u_0(x)\in C_0^{n+2}(R^n)$，则齐次一阶对称双曲组的柯西问题(3.8)、(3.2)在 $t\geqslant 0$ 上存在经典解 $u(x, t)$．

证明 考察(3.10)右端的积分及在积分号下分别关于 t 及 x_k $(k=1, \cdots, n)$ 求导一次后所得的积分

$$I_0=\int_{R^n}e^{ix\cdot\xi}iA(\xi)e^{iA(\xi)t}\hat{u}_0(\xi)d\xi, \tag{3.18}$$

$$I_k=\int_{R^n}e^{ix\cdot\xi}i\xi_k e^{iA(\xi)t}\hat{u}_0(\xi)d\xi\quad (k=1, \cdots, n). \tag{3.19}$$

由定理中关于 $u_0(x)$ 的假设及引理 3.2，有

$$|\hat{u}_0(\xi)|\leqslant M_{n+2}(1+|\xi|)^{-(n+2)}. \tag{3.20}$$

又因为$A(\xi)$是 ξ 的一次函数，所以存在常数 $C_2>0$，使

$$|A(\xi)|\leqslant C_2(1+|\xi|)\quad \forall\xi\in R^n. \tag{3.21}$$

这样，由(3.20)、(3.21)及引理 3.1，必存在常数 $C_3>0$，使对一切 $\xi\in R^n$，成立

$$|e^{ix\cdot\xi}e^{iA(\xi)t}\hat{u}_0(\xi)|\leqslant C_3(1+|\xi|)^{-(n+2)}, \tag{3.22}$$

$$|e^{ix\cdot\xi}iA(\xi)e^{iA(\xi)t}\hat{u}_0(\xi)|\leqslant C_3(1+|\xi|)^{-(n+1)}, \tag{3.23}$$

$$|e^{ix\cdot\xi}i\xi_k e^{iA(\xi)t}\hat{u}_0(\xi)|\leqslant C_3(1+|\xi|)^{-(n+1)}$$

$$(k=1, \cdots, n). \tag{3.24}$$

(3.22)、(3.23) 及 (3.24) 说明 (3.10) 右端的积分以及积分 I_0, $I_k(k=1, \cdots, n)$对一切(x, t)是一致收敛的. 这就证明了(3.10)确实给出了柯西问题(3.3)、(3.2)的解. 定理证毕.

注 3.1 定理 3.1 中要求柯西问题的初始资料 $u_0(x)$ 在一有界集外恒为零. 因为双曲型方程组具有有限的依赖区域, 这一点并不是一个严重的限制. 事实上对一般的 $u_0(x)\in C^{n+2}(R^n)$, 作一无穷可微函数 $\eta(x)$, 使

$$\eta(x)=\begin{cases}1, & \text{当} |x|<1 \text{时},\\ 0, & \text{当} |x|>2 \text{时},\end{cases}$$

然后用 $u_0^{(a)}(x)=\eta\left(\frac{x}{a}\right)u_0(x)$ 代替 $u_0(x)$ 作为初值, 这里 a 是一个正常数. 显然 $u_0^{(a)}(x)\in C_0^{n+2}(R^n)$. 由定理 3.1 及推论 2.1 知, 对这个初值, 方程组(3.3)存在唯一的解 $u^{(a)}(x, t)$. 利用依赖区域是有限的这一事实立即可得, 当 $a\to\infty$ 时, $u^{(a)}(x, t)$趋向以 $u_0(x)$ 为初值的原柯西问题的解. 这样, 也就得到了原柯西问题的可解性.

在解决了柯西问题(3.3)、(3.2)的求解问题之后, 利用齐次化原理就可求解柯西问题(3.1)～(3.2). 事实上, 设 $w(x, t; z)$是下述问题的解:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}+\sum\limits_{k=1}^{n} A_k\dfrac{\partial w}{\partial x_k}=0 \quad (t>\tau), & (3.25)\\ t=\tau:\ \ w=f(x, \tau), & (3.26)\end{cases}$$

那么

$$u(x, t)=\int_0^t w(x, t; \tau)d\tau$$

就给出方程组(3.1)在 $t=0$ 时取零初值的解. 将这个解与柯西问题(3.3)、(3.2)的解迭加, 即得柯西问题(3.1)～(3.2)的解. 至于为了使问题(3.25)～(3.26)的解存在, 对 $f(x, t)$所需添加的条件, 是容易列出的, 这里从略.

习　　题

1. 试证明常系数对称双曲算子

$$Lu\equiv\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n} A_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+Bu$$

满足戛丁(Gårding)双曲性条件，即存在一常数 C，使对矩阵

$$P(\xi)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k A_k - iB$$

的任一特征值 λ 均成立

$$|\mathrm{Im}\lambda|\leqslant C \quad \forall \xi\in R^n.$$

2. 设 $u_0(x)\in C^{n+2}(R^n)$，$u^{(a)}(x, t)$ 是在注 3.1 中所确定的函数，证明当 $a\to\infty$ 时，$u^a(x, t)$ 收敛于柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=0,\\ t=0:\ u=u_0(x)\end{cases}$$

的解.

3. 设 $u_0(x)\in C^\infty(R^n)$，试证明柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=0,\\ t=0:\ u=u_0(x)\end{cases}$$

存在唯一解 $u(x, t)\in C^\infty(R^n\times R^+)$，其中 $R^+=(0, \infty)$.

§4 混合初边值问题

4.1 问题的提法

设 Ω 为 x 空间中具有光滑边界 Γ 的有界区域. 在 (x, t) 的变化区域 $Q=\Omega\times(0, T)$ 中考察对称双曲组

$$Lu\equiv A_0\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+Bu=f(x, t). \tag{4.1}$$

在现在的情况下，为了保证方程组(4.1)的解的唯一性，象我们对波动方程已经作过的那样，除了要给定初始条件

$$t=0:\ u=u_0(x),\ x\in\Omega \tag{4.2}$$

外，还应在区域 Q 的侧面 $\Sigma=\Gamma\times(0, T)$ 上给出适当的边界条件.

线性齐次边界条件的一般形式可写为

$$Mu=0, \quad 在\ \Sigma\ 上, \tag{4.3}$$

其中 M 是一个 $p\times N$ 矩阵，其秩为 $p\leqslant N$. 如果写成分量的形式，(4.3)表示在侧面 Σ 上 u 应满足 $p(\leqslant N)$ 个线性独立的约束条件：

$$\begin{cases}m_{11}u_1+\cdots+m_{1N}u_N=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ m_{p1}u_1+\cdots+m_{pN}u_N=0,\end{cases} \quad 在\ \Sigma\ 上. \tag{4.4}$$

在侧面 Σ 上的每一点，齐次线性代数方程组(4.4)的解组成 $\mathbb{R}^N$ 的一个子空间 π. 因此，要求 u 在侧面上满足边界条件(4.3)，相当于要求 u 在侧面上的每一点属于 $\mathbb{R}^N$ 的相应的子空间 π (对于侧面上不同的点，相应的子空间 π 可以是不相同的). 所以边界条件(4.3)也可以简写为下面的形式:

$$u\in\pi,\ \text{在}\ \Sigma\ \text{上}. \tag{4.5}$$

4.2　对于非负边界条件的能量不等式

现在来考察边界条件(4.3)应满足什么要求，即子空间 π 应满足什么条件，才能使我们可以利用 §2 中对柯西问题已使用过的方法来得到初边值问题(4.1)～(4.3)的能量不等式.

将(2.8)式在 Q 上积分将

$$\int_Q\left[\frac{\partial}{\partial t}(u^TA_0u)+\sum_{k=1}^n\frac{\partial}{\partial x_k}(u^TA_ku)\right]dx\,dt+2\int_Q u^TBu\,dx\,dt$$
$$=2\int_Q u^Tf\,dx\,dt. \tag{4.6}$$

对上式左端的第一个积分利用格林公式，可将(4.6)写为

$$\int_\Omega u^TA_0u\,dx\Big|_{t=0}^{t=T}+\int_\Sigma u^TAu\,dS+2\int_Q u^TBu\,dx\,dt$$
$$=2\int_Q u^Tf\,dx\,dt, \tag{4.7}$$

其中

$$A=\sum_{k=1}^n n_kA_k, \tag{4.8}$$

而 $\boldsymbol{n}=(n_1,\cdots,n_n)$ 表示 Γ 的单位外法线向量. 如同对柯西问题所作的那样，这里仍不妨假设 B 是正定的. 这样，不难看出，只要满足边界条件(4.3)的 u 能使二次型

$$u^TAu \tag{4.9}$$

在 Σ 上是非负的，即 π 是二次型 u^TAu 的非负子空间，那么利用与 §2 中同样的推理，由(4.7)即可导出类似的能量估计，从而可得到混合初边值问题(4.1)～(4.3)的解的唯一性.

在 π 是二次型 u^TAu 的非负子空间时，我们称边界条件(4.3)

关于算子 L 是非负的.

定理 4.1 设边界条件(4.3)关于 L 是非负的，u 是初边值问题(4.1)～(4.3)的解，那么成立如下的能量估计：

$$\|u\|^2_{L^2(Q)}\leqslant C(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}+\|f\|^2_{L^2(Q)}) \tag{4.10}$$

与

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t\|f(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\right),$$
$$t\in[0,\ T], \tag{4.11}$$

其中 C 为一正常数.

证明 由关于 π 的假设知

$$u^TAu\geqslant 0 \quad \forall u\in\pi,$$

因此

$$\int_\Sigma u^TAu\,dS\geqslant 0. \tag{4.12}$$

由 B 与 A_0 的正定性有

$$\int_Q u^TBu\,dx\,dt\geqslant C_1\|u\|^2_{L^2(Q)}, \tag{4.13}$$

$$\int_\Omega u^TA_0u\,dx\bigg|_{t=T}\geqslant C_2\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.14}$$

又显然有

$$\left|\int_\Omega u^TA_0u\,dx\bigg|_{t=0}\right|\leqslant C_3\|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.15}$$

另外，类似于(2.15)有

$$\left|\int_Q 2u^Tf\,dx\,dt\right|\leqslant C_1\|u\|^2_{L^2(Q)}+\frac{1}{C_1}\|f\|^2_{L^2(Q)}. \tag{4.16}$$

将估计式(4.12)～(4.16)代入(4.7)式，即得

$$C_2\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)}+C_1\|u\|^2_{L^2(Q)}\leqslant C_3\|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{C_1}\|f\|^2_{L^2(Q)}. \tag{4.17}$$

由上式立即可得(4.10)式. 为了要得到估计式(4.11)，只要将(4.17)中的 T 换成 t，Q 换成 $\Omega\times(0,\ t)$即可. 定理证毕.

由定理 4.1 所示的能量不等式立即有下面的唯一性定理.

定理 4.2 具有非负边界条件的混合初边值问题(4.1)～

(4.3)的解是唯一的.

4.3 合格边界条件

上面在边界条件(4.3)为非负的假设下，得到了初边值问题的能量估计，从而证明了定解问题解的唯一性. 我们自然要问："边界条件为非负"这个假设能否保证初边值问题解的存在性呢？回答一般来说是否定的. 因为若有一组非负边界条件已使初边值问题存在唯一解，那么在此基础上，在边界上再人为地添加线性边界条件仍能保证二次型 u^TAu 的非负性，因为此时由于约束条件增加，边界空间 π 将变小. 故一般来说，这时我们不能再指望定解问题仍有解存在. 鉴于这个理由，为了保证解的存在性，我们应要求边界空间 π 在所有的非负子空间中是最大的，这就引入了如下的定义：设边界空间 π 是二次型 u^TAu 的非负子空间，且如果不存在 u^TAu 的一个非负子空间以 π 为其真子空间，那么称 π 为 u^TAu 的最大非负子空间.

定义 4.1　设边界条件 (4.3) 在 Σ 上的任一点所对应的边界空间 π 是 u^TAu 的最大非负子空间，那么称这个边界条件关于算子 L 是合格的.

在适当的假设下，对合格的边界条件，可以证明初边值问题(4.1)～(4.3)的解的存在性. 对这个问题的讨论超出本书的范围，我们就不深入下去了. 这里要指出的是，对于一阶对称双曲组而言，边界条件的合格性这一要求给出了一个较一般的准则，使我们可以判断在边界上给出什么样的边界条件是合理的. 这个准则，在许多情况下很有用处，而且使用起来也是很方便的.

下面我们继续讨论合格边界条件的性质.

首先要说明的是，对二次型 u^TAu 而言，最大非负子空间并不是唯一的. 如果考虑到，对同一个方程组我们可以提各种实质上不相同的边界条件，那么最大非负子空间的不唯一性就是很自然的了.

【例 4.1】　在区域 $Q=(0,1)\times(0,T)$ 中考察方程组

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=0. \tag{4.18}$$

在边界 $x=0$ 上,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},$$

相应的二次型为

$$u^T Au=u_1^2-u_2^2,$$

所以如下的边界条件

$$x=0:\quad u_2-\sigma u_1=0,\ |\sigma|\leqslant 1 \tag{4.19}$$

都是非负边界条件，而且由边界条件(4.19)所确定的边界空间 π 显然是 u^TAu 的最大非负子空间(从而 (4.19) 是 $x=0$ 处的合格边界条件)．但在(u_1, u_2)空间,对不同的 σ, π 表示过原点的不同的直线,即是不同的子空间．由上述,图 6.2 阴影区域中过原点的直线都是 u^TAu 的最大非负子空间.

图 6.2

既然最大非负子空间不是唯一的，那么不同的最大非负子空间能否具有不同的维数呢？回答是否定的．下面一个定理告诉我们，最大非负子空间的维数是唯一确定的.

为了简单起见，我们只讨论侧面 Σ 关于算子 L 处处为非特征的情形，即设矩阵 A 在侧边 Σ 上处处非异.

定理 4.3 设侧面 Σ 关于算子 L 为非特征，那么 u^TAu 的最大非负子空间的维数等于矩阵 A 的正特征值的个数.

证明 因 A 为非异的对称阵，所以其特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ 均为非零实数,且相应的特征向量 $u^{(1)}, \cdots, u^{(N)}$ 可组成标准正交系．设

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_r>0,\ \lambda_{r+1}, \cdots, \lambda_N<0,$$

并记 π 为 u^TAu 的最大非负子空间，我们证明

$$\dim \pi = r.$$

(1) 先证 $\dim \pi \leqslant r$. 用反证法. 若 $\dim \pi > r$, 那么 $\dim \pi + N - r > N$, 因此 π 与由特征向量 $u^{(r+1)}, \cdots, u^{(N)}$ 张成的子空间的交是一个非零子空间. 所以一定存在一个非零向量 $v \in \pi$, 且

$$v = \sum_{k=r+1}^{N} \alpha_k u^{(k)}, \tag{4.20}$$

其中 $\alpha_k (k=r+1, \cdots, N)$ 不全为零. 由特征函数的正交性，有

$$\begin{aligned} v^TAv &= v^T \sum_{k=r+1}^{N} \alpha_k A u^{(k)} = v^T \sum_{k=r+1}^{N} \alpha_k \lambda_k u^{(k)} \\ &= \sum_{j=r+1}^{N} \sum_{k=r+1}^{N} \alpha_j \alpha_k \lambda_k (u^{(j)})^T u^{(k)} = \sum_{k=r+1}^{N} \alpha_k^2 \lambda_k < 0, \end{aligned} \tag{4.21}$$

这与 $v \in \pi$ 矛盾.

(2) 再证 $\dim \pi \geqslant r$. 用反证法. 若 $d = \dim \pi < r$, 那么对 $v = (v_1, \cdots, v_N)^T$ 考察如下的方程组:

$$\begin{cases} v^TAu = 0 \quad \forall u \in \pi, & (4.22) \\ v^T \cdot u^{(i)} = 0 \quad (i = r+1, \cdots, N). & (4.23) \end{cases}$$

因 A 非异，所以 $\dim A\pi = \dim \pi = d$. 这样，(4.22)～(4.23) 实质上是关于 v 的 $d+N-r$ 个方程所组成的线性代数方程组. 但 $d+N-r<N$, 所以 (4.22)～(4.23) 必存在非零解 v. 由 (4.23) 式，可将 v 表示为如下特征向量的线性组合:

$$v = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k u^{(k)}, \tag{4.24}$$

其中 $\alpha_k (k=1, \cdots, r)$ 不全为零. 于是得

$$v^TAv = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \alpha_k^2 > 0, \tag{4.25}$$

所以由 (4.22) 知 $v \notin \pi$.

对任意的 $u \in \pi$ 及任意实数 τ, 由 (4.22) 及 (4.25) 式有

$$\begin{aligned} (u+\tau v)^T \cdot A(u+\tau v) &= u^TAu + 2\tau v^TAu + \tau^2 v^TAv \\ &\geqslant \tau^2 v^TAv \geqslant 0. \end{aligned}$$

由于 $v \notin \pi$, 这与 π 的最大非负性矛盾.

综合(1)及(2),即得 $\dim \pi = r$. 定理证毕.

注 4.1 在 A 不是非异的情况下,类似地可以证明: $u^T A u$ 的最大非负子空间的维数等于 A 的非负特征值的个数.

下面通过两个简单的例子来说明如何确定合格的边界条件.

【例 4.2】 在区域 $\Omega=(0, 1)\times(0, T)$ 中讨论一个空间变数的对角型方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A\frac{\partial u}{\partial x}+Bu=f(x, t), \tag{4.26}$$

其中 $A=\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$, 而 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r<0$, $\lambda_{r+1}, \cdots, \lambda_N>0$. 现考察对方程组(4.26)而言,在边界 $x=0$ 与 $x=1$ 处,应提什么样的边界条件.

在边界 $x=0$ 处, $\mathcal{A}=-A$. 由定理 4.3 知, $u^T\mathcal{A}u$ 的最大非负子空间为 r 维, 从而在 $x=0$ 处应给出 $N-r$ 个独立的线性约束条件. 显然

$$u_j=0 \quad (j=r+1, \cdots, N) \tag{4.27}$$

是一个合格边界条件. 一般地说,设在 $x=0$ 处的合格边界条件可写为

$$\sum_{k=1}^{N} m_{ik}u_k=0 \quad (i=1, \cdots, N-r), \tag{4.28}$$

其中矩阵 (m_{ik}) 的秩为 $N-r$. 为讨论方便起见, 将(4.28)改写为如下形式:

$$M^I u^I+M^{II}u^{II}=0, \tag{4.29}$$

其中

$$u^I=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_r\end{pmatrix}, \quad u^{II}=\begin{pmatrix}u_{r+1}\\ \vdots\\ u_N\end{pmatrix}.$$

易知矩阵 M^{II} 一定是非异的. 否则,方程

$$M^{II}u^{II}=0$$

将有非零解 v^{II}, 从而 $v=\begin{pmatrix}0\\ v^{II}\end{pmatrix}$ 满足(4.29), 即 $v\in\pi$. 但另一方面

，有

$$v^T\cdot Av=-\sum_{j=r+1}^{N}\lambda_j v_j^2<0,$$

这就与 π 的意义矛盾。由于 M^{II} 非异，(4.29) 总可表示为如下形式：

$$u_j=\sum_{i=1}^{r}p_{ji}u_i \quad (j=r+1, \cdots, N). \tag{4.30}$$

为了使边界条件(4.30)为非负（从而一定最大非负，即为合格边界条件），(4.30)中的 p_{ji} 还应满足如下要求：

$$-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i u_i^2-\sum_{j=r+1}^{N}\lambda_j\Big(\sum_{i=1}^{r}p_{ji}u_i\Big)^2\geqslant 0. \tag{4.31}$$

类似地，在 $x=1$ 处，合格边界条件的一般形式应为

$$u_i=\sum_{j=r+1}^{N}q_{ij}u_j \quad (i=1, \cdots, r), \tag{4.32}$$

其中 q_{ij} 应满足如下要求：

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\Big(\sum_{j=r+1}^{N}q_{ij}u_j\Big)^2+\sum_{j=r+1}^{N}\lambda_j u_j^2\geqslant 0. \tag{4.33}$$

容易看出，当 $|p_{ji}|$ 与 $|q_{ij}|$ 取得充分小时，条件(4.31)与(4.33)总是可以满足的。这就是说，当 $|p_{ji}|$ 及 $|q_{ij}|$ 充分小时，在边界 $x=0$ 与 $x=1$ 处，分别由(4.30)及(4.32)给出的边界条件是合格的。

【例 4.3】 在 $Q=\Omega\times(0, T)$ 中考察高维波动方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}\right)=f(x, t). \tag{4.34}$$

由 §1 中的例 1.3，此时在侧面 $\Sigma=\Gamma\times(0, T)$ 上有

$$A=\sum_{k=1}^{n}n_k A_k=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -n_1c^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -n_nc^2 \\ -n_1c^2 & \cdots & -n_nc^2 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{n}=(n_1, \cdots, n_n)$ 是 Γ 上的单位外法线向量。于是

$$u^T A u = -2c^2 \sum_{k=1}^{n} n_k u_k u_{n+1}$$

$$= \frac{c^2}{2}\left(u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} n_k u_k\right)^2 - \frac{c^2}{2}\left(u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} n_k u_k\right)^2. \quad (4.35)$$

由此可见，并非对任何的 u 都能使 $u^T A u \geqslant 0$，即 $u^T A u$ 的最大非负子空间不是全空间．于是在侧面 $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ 上必须给出边界条件．但由(4.35)不难看出形如

$$u_{n+1} - \lambda \sum_{k=1}^{n} n_k u_k = 0 \quad (\lambda \leqslant 0) \quad (4.36)$$

或

$$\lambda u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} n_k u_k = 0 \quad (\lambda \leqslant 0) \quad (4.37)$$

的边界条件是非负的，其中 λ 是实参数．因为 $u^T A u$ 的最大非负子空间的维数小于 $N = n+1$，故(4.36)或(4.37)必为 $u^T A u$ 的最大非负子空间，从而它们所给出的边界条件是合格的．

如果在(4.36)中取 $\lambda = 0$，即得

$$u_{n+1} = 0, \quad (4.38)$$

它是个合格边界条件．用 $u_{n+1} = \frac{\partial v}{\partial t}$，换回原来的未知函数 v，并利用 v 在 $t=0$ 时的初值为零，这相当于要求在 Σ 上成立

$$v = 0, \quad (4.39)$$

这就是第一类边界条件．如果在(4.37)中取 $\lambda = 0$，即得

$$\sum_{k=1}^{n} n_k u_k = 0, \quad (4.40)$$

用 $u_k = \frac{\partial v}{\partial x_k}$ $(k=1, \cdots, n)$ 换回原来的未知函数 v，即得在 Σ 上

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad (4.41)$$

这就是第二类边界条件．

习　题

1．设 $Q = \Omega \times (0, T)$，Ω 是 R^n 中的一个有界区域，边界为 Γ，

$$Lu = A_0\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Bu = f(x, t)$$

是一阶对称双曲组. 如果给定的边界条件

$$Mu|_{\Sigma} = 0$$

所决定的边界空间 σ 是二次型 $u^T A u$ 的非正子空间，这里 A 由(4.8)定义，证明对下述边值问题

$$\begin{cases} L^* v = g(x, t), \ (x, t) \in Q, \\ Mv|_{\Sigma} = 0, \\ v|_{t=T} = v_0(x) \end{cases}$$

也成立能量估计式，其中 L^* 是 L 的共轭算子:

$$L^* = -A_0\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Bu.$$

2. 设 Ω 是 R^3 中的一个有界区域，其边界为 Γ，证明对声学方程组(1.5)来说，在侧面 $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ 上的下述边界条件

$$n_1 v_1 + n_2 v_2 + n_3 v_3 = 0$$

是一个合格的边界条件，其中 (n_1, n_2, n_3) 是 Γ 上的单位外法线向量.

3. 设 Ω 是 R^2 中的一个有算区域，其边界为 Γ. 对由弹性力学方程组(1.8)～(1.9)所得到的一阶对称双曲组来说，证明在侧面 $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ 上形如

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) n_1 u_1 + \mu n_2 u_2 + (\lambda + \mu) n_1 u_5 + \alpha \rho u_3 = 0, \\ (\lambda + \mu) n_2 u_1 + \mu n_1 u_4 + (\lambda + 2\mu) n_2 u_5 + \beta \rho u_6 = 0 \end{cases}$$

的边界条件是合格边界条件，其中 $0 \leqslant \alpha < \infty$，$0 \leqslant \beta < \infty$，$(n_1, n_2)$ 是 Γ 上的单位外法线向量，λ 及 μ 是拉梅常数.

§ 5 一阶拟线性对称双曲组

考察如下形式的一阶拟线性偏微分方程组

$$A_0(u)\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} A_k(u) \frac{\partial u}{\partial x_k} = f(u), \tag{5.1}$$

其中 $A_k (k = 0, 1, \cdots, n)$ 是依赖于未知函数向量 $u = (u_1, \cdots, u_N)^T$ 的 $N \times N$ 阵.

定义 5.1 若对任意给定的 $u \in R^N$，A_0 是对称正定阵，$A_k (k = 1, \cdots, n)$ 是对称阵，则称(5.1)为**一阶拟线性对称双曲组**.

在物理及力学中所碰到的许多拟线性双曲型方程(组)都可以化为一阶拟线性对称双曲组. 例如第三章 § 4 中描述可压缩流体

运动的流体动力学方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\sum\limits_{k=1}^{3}\dfrac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k)=0, & (5.2)\\ \dfrac{\partial v_i}{\partial t}+\sum\limits_{k=1}^{3}v_k\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k}+\dfrac{p'(\rho)}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial x_i}=0\quad(i=1,\ 2,\ 3) & (5.3)\end{cases}$$

就可以通过下述办法化为一阶拟线性对称双曲组. 以 $\dfrac{p'}{\rho}$ 乘(5.2)两边, 以 ρ 乘(5.3)中各方程两边, 记 $u=(\rho,\ v_1,\ v_2,\ v_3)^T$, (5.2)～(5.3)可改写成

$$A_0\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}A_k\frac{\partial u}{\partial x_k}=0, \tag{5.4}$$

其中

$$A_0=\begin{pmatrix}\dfrac{p'}{\rho} & & & \\ & \rho & & \\ & & \rho & \\ & & & \rho\end{pmatrix},\quad A_1=\begin{pmatrix}\dfrac{p'}{\rho}v_1 & p' & 0 & 0\\ p' & \rho v_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix}\dfrac{p'}{\rho}v_2 & 0 & p' & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ p' & 0 & \rho v_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}\dfrac{p'}{\rho}v_3 & 0 & 0 & p'\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ p' & 0 & 0 & \rho v_3\end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

由于 $\rho>0$, $p'(\rho)>0$ 立即可知(5.4)是一个一阶拟线性对称双曲组.

对一阶拟线性对称双曲组(5.1),我们同样可以提相应的柯西问题:

$$\begin{cases}A_0(u)\dfrac{\partial u}{\partial t}+\sum\limits_{k=1}^{n}A_k(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=f(u),\\ t=0:\ u=u_0(x)\end{cases} \tag{5.6}$$

以及混合初边值问题等. 这些问题可用迭代法求解, 应用对线性问题的能量估计式以及 Leray-Schauder 不动点原理, 当资料适当光滑时, 可以证明存在一个正常数 t_0, 使所考察的柯西问题

(或混合初边值问题)在$[0, t_0]$中存在唯一的经典解．具体证明从略．

在这里要强调指出的是，和线性对称双曲方程组可以在任意时段$[0, T]$中存在"大范围"的经典解不同，一阶拟线性对称双曲组的柯西问题(或混合初边值问题)一般只能在小范围$[0, t_0]$中存在局部的经典解，而当$t>t_0$时，经典解可能不存在，称为解的破裂(blow up)．这一事实是线性方程组与拟线性方程组的本质区别之一．为说明这一点，考察一个最简单的例子

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, & (5.7)\\ t=0:\ u=\varphi(x). & (5.8)\end{cases}$$

易见，(5.7)～(5.8)的经典解u在通过初始轴$t=0$上一点$(x_0, 0)$的直线(特征线)$x-x_0=\varphi(x_0)t$上保持为常数值$u=\varphi(x_0)$．这样，如果所给的初值$\varphi(x)$满足条件：存在两点x_1及x_2，使$x_1<x_2$而$\varphi(x_1)>\varphi(x_2)$，则直线$x-x_1=\varphi(x_1)t$与直线$x-x_2=\varphi(x_2)t$就会在某一时刻$t_1>0$相交，而解在交点值的值就不能唯一确定．因此，(5.7)～(5.8)的解必定在有限时间内破裂．

很多拟线性双曲型方程组都描述某些确定的力学现象，而力学现象的发生一般并不终止于某一时刻，所以客观实际往往要求在大范围中求解．对一阶拟线性对称双曲组的深入研究表明，当方程组和初值满足一定的附加条件时，其相应的柯西问题就会有大范围经典解存在．例如对问题(5.7)～(5.8)，容易看到，当φ是x的单调不降函数$(\varphi'(x)\geqslant 0)$时，在$t\geqslant 0$就存在大范围经典解；又如对柯西问题(5.6)，在方程组具有某种耗散性质，且初值又是适当"小"时，也可以证明在$t\geqslant 0$时大范围经典解的存在唯一性．另一方面，前面解在有限时间内破裂的例子说明，往往需要把经典解的概念加以扩充，使它能够反映自然现象从连续到间断的转化，将可能发生的各种形式的间断性质包含在解的定义中．以空气动力学中的激波现象为模型所定义的拟线性双曲组的间断解，就是一个突出的例子．

习　　题

1. 设 $\varphi(x)$ 为有界的 C^1 函数，证明柯西问题(5.7)～(5.8)在 $t\geqslant 0$ 上存在整体经典解的充要条件是对一切 $x\in\mathbf{R}$ 成立

$$\varphi'(x)\geqslant 0.$$

2. 对形如

$$\zeta(u)\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda(u)\zeta(u)\frac{\partial u}{\partial x}=\mu(u)$$

的拟线性方程组，其中 $u=(u_1,\ \cdots,\ u_N)^T$，$\zeta(u)$ 是非异的 $N\times N$ 阵，$\lambda(u)$ 为 N 阶对角阵，而 $\mu(u)$ 为 N 维向量，证明它一定可以化为一阶拟线性对称双曲组。

第七章

偏微分方程的广义解和数值解

在本章中，以调和方程的狄利克雷问题为例介绍广义解的概念及几种广义解的定义（§2），并从不同的广义解的定义出发导出几种常用的数值求解方法（§3）。

§1 引　　言

在本书的前几章中，我们主要讨论了一些数学物理方程及其定解问题的经典解，它在求解区域中适当光滑，并按通常的意义满足方程及定解条件（即将解代入方程及定解条件后可使其化为恒等式）．这种经典解的概念是最容易理解的，而且如果能够求得经典解，应用起来也是最方便的．但是在实际求解数学物理方程的问题时，有时（甚至在很多情况下）尽管我们希望能得到经典解，但却不一定能得到它，或者不一定能一下子得到它．例如在问题中给定的资料（如方程的系数，非齐次项或定解条件，甚至区域）本身不够光滑的情况下，经典解就可能不存在．这样，在研究数学物理方程的定解问题时，往往不得不放弃（或至少暂时地放弃）经典解，而考察非经典意义下的解，即广义解．

广义解的定义是多种多样的．总的说来，广义解不具有经典解那样高的光滑性，因而不能要求它按通常的意义满足方程及定解条件，而只能要求它在某种适当的意义下满足方程及定解条件．这里所说的按某种适当的意义满足方程及定解条件，可以有多种不同的形式，实际上就由此给出了各种不同的广义解的定义．然而，尽管广义解可以有多种多样的定义，但均应满足一些共同的要求，即只要所考察的广义解具有足够的正规性（即适当高的光滑性），就应该是经典解，即按通常的意义满足方程及定解条件；反

之，满足一定正规性的经典解如果存在，也一定是广义解.

一般说来，由于对广义解的要求较低，要求得所考察问题的广义解相对来说是比较容易的. 因此，要求解数学物理方程的定解问题，可以先求其广义解(这往往已经可以满足问题的需要)，然后在可能的条件下再证明此广义解具有足够的正规性，从而在实质上是问题的经典解. 我们可以看到，由对经典解的研究过渡到广义解，是适应实际需要的必然趋势，也是由数学物理方程的经典理论发展为现代理论的一个突出的标志.

由于广义解的定义各种各样，不可能也不必要一一加以介绍. 我们在下面§2中将以调和方程的狄利克雷问题为例，介绍其广义解的几种定义，并考虑其间的相互关系. 由此可以看到，广义解并不神秘，它的引入通常是很自然和合理的，往往具有相应的力学和物理背景. 接着，在§3中，我们将从这些不同的广义解定义出发，通过离散化，引导出求解数学物理方程的几种常用的数值求解方法. 由此可见，对广义解概念的不同理解，不仅给数学物理方程的研究带来丰富的内容和多采的面貌，而且为数学物理方程数值解法提供了不同的出发点. 换句话说，数学物理方程的各种不同的数值解法，可以从对广义解概念的不同理解上找到它的渊源. 至于对各种数值解法的详细讨论，不是本章所要着重说明的问题，读者可参看有关数值解法方面的书籍.

§2 调和方程狄利克雷问题的广义解

我们在(x, y)平面的有界区域Ω上考察下述调和方程的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (2.1) \\ u|_\Gamma = f, & (2.2) \end{cases}$$

其中Γ为Ω的边界，设其分段光滑，而f为在Γ上给定的连续函数.

我们已知，有很多不同面貌的物理、力学问题归结为上述定解

问题的研究。为了下文的需要，这里仅举出下面两个例子。

【例 2.1】　平面稳定温度场。

考虑一均匀且各向同性的平面物体，设其厚度为1，而它在 (x, y) 平面上所占的区域为 Ω. 设在 Ω 的边界 Γ 上给定稳定温度 f，要求此物体在 Ω 上的稳定温度分布函数 $u=u(x, y)$，由第四章§1，就化为上述的狄利克雷问题(2.1)～(2.2).

现在我们再从头考虑一下该问题的归结过程．由于温度场是稳定的，此时在物体内部虽然仍有热量的流动，但在任何地方均不可能有热量的积聚或损耗．因此，对 Ω 内任一分段光滑的闭环路 L，由热量平衡条件，流入 L 中的净热量应为零．根据热传导的傅立叶实验定律，设 L 的单位外法线向量为 $\boldsymbol{n}$，则在单位时间内沿 $\boldsymbol{n}$ 方向经过 L 上弧 dS 的热量为

$$dQ = -k\frac{\partial u}{\partial n}dS,$$

其中 k 为热传导系数．因此

$$\int_L dQ = -\int_L k\frac{\partial u}{\partial n}dS = 0 \quad \forall L,$$

即成立

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial n}dS = 0 \quad \forall L. \tag{2.3}$$

若 $u=u(x, y)\in C^2(\Omega)$，由格林公式有

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial n}dS = \iint_{\mathscr{D}} \Delta u\, dx\, dy, \tag{2.4}$$

其中 $\mathscr{D}$ 为由 L 所包围的区域．从而，此时(2.3)式可写为

$$\iint_{\mathscr{D}} \Delta u\, dx\, dy = 0 \quad \forall \mathscr{D}. \tag{2.5}$$

再由于 $\mathscr{D}$ 的任意性，就得到调和方程(2.1).

这样，在边界上温度分布为已知的平面稳定温度分布函数 $u=u(x, y)$，只要属于 $C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$，就应为狄利克雷问题(2.1)～(2.2)的解．

【例 2.2】　弹性膜的平衡．

由第四章例1.1，边界固定的均匀弹性膜在不受外力作用时，其在垂直方向的位移 $u=u(x, y)$ 同样满足狄利克雷问题 (2.1)～(2.2)，其中 Ω 为膜在 (x, y) 平面上的投影所占的区域，Γ 为其边界，而边界条件(2.2)由膜在边界上的固定情况所决定.

下面来看一个怎样的函数 $u=u(x, y)$ 可以被称为是狄利克雷问题 (2.1)～(2.2) 的解，并由此引入各种不同的解的定义.

狄利克雷问题(2.1)～(2.2)的解的最自然的定义是如下的

定义 I 若函数 $u=u(x, y)\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$，且将其代入方程(2.1)及边界条件(2.2)能使它们化为恒等式，就称 $u=u(x, y)$ 是狄利克雷问题(2.1)～(2.2)的解或经典解.

这是我们在前面几章中已经仔细讨论过的情形，然而，这并不是对解的意义的唯一的理解方式.

以前述稳定温度场的情形为例. 在得到调和方程(2.1)之前，我们首先由热量平衡条件得到(2.3)式，然后在 $u\in C^2(\Omega)$ 的假设下，再利用格林公式推得调和方程 (2.1). 反之，若 $u\in C^2(\Omega)$，并满足调和方程(2.1)，采用相反的步骤也可证得(2.3)式. 这样，上述经典解的定义就可以等价地表示为：$u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$，且 u 满足 (2.3) 及 (2.2) 式.

注意到在对解的定义的这一表述中，我们没有要求 u 满足二阶偏微分方程(2.1)，而只是要求 u 满足积分方程(2.3)，其中只出现 u 的一阶偏导数. 对解的定义的这一表述方式，在 $u\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$，甚至 $u\in C^0(\overline{\Omega})$，在 Ω 中分块 C^1 的时候，仍然是可以有意义的，我们可利用它对解的概念加以扩充，在更广的函数类中求解. 为此，引入如下的

定义 II 若函数 $u=u(x, y)\in C^0(\overline{\Omega})$，在 Ω 中分块 C^1，且满足

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} dS=0 \quad \forall L \tag{2.3}$$

及

$$u|_\Gamma=f, \tag{2.2}$$

其中 L 是 Ω 中的任一分块光滑的闭环路，n 是其上的单位外法线向量，则称 $u=u(x, y)$ 为狄利克雷问题(2.1)～(2.2)的解或广义解.

由上所述，由定义 I 定义的经典解 $u=u(x, y)$ 一定是由定义 II 定义的广义解；反之，若由定义 II 定义的广义解 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$，则它一定是由定义 I 定义的经典解. 但一般说来，采用定义 II，对解的概念是一种扩充.

我们看到，这里对解的概念的两种不同的理解，本质上仍然反映了同样的物理模型（如热量的平衡），但可以据此将解的概念进行一定的扩充. 由于在一个更广的函数类中求问题的解，总比在一个较狭的函数类中求解要来得方便一些，只要不破坏解的唯一性，将解的概念进行适当的扩充，对求解将会带来一定的方便，这一点我们在下一节中还将会看到.

狄利克雷问题(2.1)～(2.2)的解的另一形式的定义仍然可以从相应的物理模型中导出. 根据力学中的最小总位能原理，一个物体如果处于稳定的平衡状态，其相应的总位能必达到最小. 现在考察前述的均匀弹性膜的平衡问题. 可以证明，(相差一个常数因子)弹性膜的总位能可写为

$$J(u)=\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy, \tag{2.6}$$

其中 Ω 为膜在 (x, y) 平面上的投影所占的区域，$u=u(x, y)$ 为膜在垂直方向的位移. 利用最小总位能原理，处于平衡状态的膜在垂直方向的位移 $u=u(x, y)$ 所对应的总位能 $J(u)$ 应不超过其他一切可能的垂直方向位移状态 $v=v(x, y)$ 所对应的总位能 $J(v)$. 精确地说，若 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ 是狄利克雷问题(2.1)～(2.2)的经典解，且 $J(u)$ 取有限值，则必成立

$$\begin{aligned} &J(u)\leqslant J(v),\quad \forall v\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega}),\\ &\qquad v|_{\Gamma}=f,\quad J(v)\text{ 取有限值}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

即成立

$$J(u)=\min_{v\in\widetilde{V}} J(v),\quad v\in\widetilde{V}, \tag{2.8}$$

其中

$$\widetilde{V}=\{v \mid v\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega}),\ v|_\Gamma=f,\ J(v)<+\infty\}. \quad (2.9)$$

因此，u 可视为一个变分问题的解，即求泛函 $J(v)$ 在集合 $\widetilde{V}$ 上的最小值问题的解．反之，还可以证明(见下文)，若 $u\in\widetilde{V}$，且满足(2.8)式，则 u 必是狄利克雷问题(2.1)～(2.2)的经典解．

这样，一个偏微分方程的求解问题 (2.1)～(2.2) 就可化为一个变分问题 (2.8)，这个事实称为*变分原理*．在现在的情形下，它是最小总位能原理的一个具体表现．

注意到泛函 $J(v)$ 中只出现 v 的一阶偏导数的平方积分，可以利用上述变分原理将解的概念加以扩充，而引入如下的

定义 III 记函数集合

$$V=\{v \mid v\in C^0(\overline{\Omega}),\text{在 }\Omega\text{ 中分块 }C^1,\ v|_\Gamma=f,\ J(v)<+\infty\}. \quad (2.10)$$

若函数 $u=u(x, y)\in V$，满足

$$J(u)=\min_{v\in V}J(v), \quad (2.11)$$

而

$$J(v)=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy, \quad (2.12)$$

则称 $u=u(x, y)$ 为狄利克雷问题(2.1)～(2.2)的解或广义解．

下面我们将要证明，由定义 I 定义的经典解，若使 $J(u)$ 为有限，则必为定义 III 定义的广义解；反之，若由定义 III 定义的广义解 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$，则它必为由定义 I 定义的经典解．但一般说来，采用定义 III，对解的概念是一个扩充．

这里指出，如果采用*索伯列夫* (Соболев) *空间*，上述广义解的概念还可得到进一步的扩充，并仍能保证解的唯一性．不仅如此，索伯列夫空间实际上还为讨论上述类型的变分问题提供了一个最自然的框架，但这里我们不拟涉及这方面的内容．

最后，我们再介绍解的另一种形式的定义，它和上述解的定义 III 是完全对等的，但却采取不同的形式．

仍先在 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$，$J(u)$ 为有限的假设下考察解．

由于 $u|_\Gamma=f$，由(2.8)式，可得：对任一实数 λ，成立

$$J(u)\leqslant J(u+\lambda w)\quad \forall w\in \tilde{V}_0, \tag{2.13}$$

其中

$$\tilde{V}_0=\{w\,|\,w\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega}),\ w|_\Gamma=0,\ J(w)<+\infty\}. \tag{2.14}$$

注意到

$$\begin{aligned} J(u+\lambda w)&=\iint\limits_\Omega\left[\left(\frac{\partial(u+\lambda w)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(u+\lambda w)}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\\ &=J(u)+2\lambda\iint\limits_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dx\,dy\\ &\quad+\lambda^2 J(w), \end{aligned}\tag{2.15}$$

且它当 $\lambda=0$ 时达最小值，就应有

$$\left.\frac{dJ(u+\lambda w)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}=0,$$

从而成立

$$\iint\limits_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dx\,dy=0\quad \forall w\in\tilde{V}_0. \tag{2.16}$$

反之，假设 $u\in\tilde{V}$，由上式又可反过来推得(2.8)式．事实上，对任何 $v\in\tilde{V}$，令

$$w=v-u\in\tilde{V}_0,$$

由(2.15)～(2.16)式就有

$$J(v)=J(u+w)=J(u)+J(w)\geqslant J(u)\quad \forall v\in\tilde{V},$$

这就是(2.8)式．

因此，为了确定狄利克雷问题(2.1)～(2.2)的解 $u=u(x,y)\in\tilde{V}$，(2.8)式和(2.16)式是等价的．我们已经知道，(2.8)式对应于力学中的最小总位能原理，而(2.16)式是通过试验函数 $w\in\tilde{V}_0$ 来判定解的，它对应于力学中的虚位移原理．

这里补充证明前述的变分原理，即若 $u\in\tilde{V}$，则 u 是狄利克雷问题(2.1)～(2.2)的经典解等价于成立(2.8)式．由于已证得此时(2.8)式和(2.16)式等价，只需证明 u 是狄利克雷问题(2.1)～

(2.2)的经典解等价于成立(2.16)式即可.

先设 $u\in\widetilde{V}$ 为由定义 I 定义的经典解, 对任何 $w\in\widetilde{V}_0$, 用 w 乘调和方程(2.1)的两端, 然后在 Ω 上积分, 就得到

$$\iint_\Omega w\Delta u\,dx\,dy=0\quad \forall w\in\widetilde{V}_0, \tag{2.17}$$

再利用格林公式, 并注意到 $w|_\Gamma=0$, 就得到

$$\begin{aligned}0&=\iint_\Omega w\,\Delta u\,dx\,dy=\iint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(w\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dx\,dy\\&\qquad-\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dx\,dy\\&=\int_\Gamma w\frac{\partial u}{\partial n}dx\,dy-\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dx\,dy\\&=-\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dx\,dy\quad\forall w\in\widetilde{V}_0,\end{aligned}$$

这就是(2.16)式.

采用和上面相反的过程, 由(2.16)式可推得(2.17)式. 由此必可推得 u 在 Ω 中满足调和方程(2.1). 因若不然, 不妨设存在一点 $(x_0, y_0)\in\Omega$, 使 $\Delta u(x_0, y_0)>0$. 由于 $u\in C^2(\Omega)$, 必存在 (x_0, y_0) 的一个邻域, 使在其中成立 $\Delta u>0$. 取试验函数 $w\in\widetilde{V}_0$, 使它在此邻域中 >0, 而在其外恒等于 0 (这样的试验函数是一定可以取到的), 就与(2.17)式矛盾. 这就证明了所要求的等价性.

显然, 用(2.16)式定义的解的概念可以和定义 III 中那样地进行扩充, 而引入如下的

定义 IV 若函数 $u=u(x, y)\in V$ (见(2.10)式), 且满足

$$\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dx\,dy=0\quad\forall w\in V_0, \tag{2.18}$$

其中

$$\begin{aligned}V_0=\{w\mid w\in C^0(\overline{\Omega}),\ &\text{在 }\Omega\text{ 中分块 }C^1,\\ &w|_\Gamma=0,\ J(w)<+\infty\},\end{aligned} \tag{2.19}$$

则称 $u=u(x, y)$ 为狄利克雷问题(2.1)~(2.2)的解或广义解.

完全重复前面的讨论，可知定义 III 与定义 IV 是完全等价的．

上面我们对狄利克雷问题(2.1)～(2.2)介绍了有关解的意义的四种不同的理解方式．我们可以看到，如果所考察的解具有足够的正规性，这四种意义下的解都是等价的．另一方面，对不同意义下的解，由于其表述形式的不同，可以相应地对解的概念作适当的扩充，在更广的函数类中考虑其广义解，而用不同的方式进行扩充后所得的广义解是不一定等价的．

我们指出，将解的概念进行扩充的方法除上述的几种以外，还可以有其它的方法，其中特别重要的是利用广义函数将解的概念进行扩充，但我们这儿对此不再进行讨论．

习　　题

1．证明：若 $u\in C^2(\Omega)$，并满足调和方程(2.1)，则 u 一定满足(2.3)式．

2．直接证明下述的变分原理：若 $u\in\tilde{V}$(见(2.9)式)，则 u 是狄利克雷问题(2.1)～(2.2)的精确解的充要条件是(2.8)式成立．

3．证明：若 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$，$u|_\Gamma=f$，且对任何 $w\in C^2(\Omega)$，w 在 Ω 中是紧支集(即 w 在 Ω 的边界 Γ 的一邻域中恒为零)，成立

$$\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dx\,dy=0,$$

则 u 必为狄利克雷问题(2.1)～(2.2)的经典解．

4．证明：若 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$，$u|_\Gamma=f$，且对任何具紧支集的 $w\in C^\infty(\Omega)$，成立

$$\iint_\Omega u\,\Delta w\,dx\,dy=0,$$

则 u 必为狄利克雷问题(2.1)～(2.2)的经典解．

5．证明：对由定义 II 定义的广义解 $u=u(x,y)$，仍成立平均值公式及极值原理，从而证明此广义解的唯一性．

6．证明由定义 IV 或定义 III 所定义的广义解的唯一性．

§3　调和方程狄利克雷问题的数值解

在实际求解偏微分方程的定解问题时，除了在一些特殊的情

况下可以方便地求得其精确解外,在一般的情况下,当方程或定解条件具有比较复杂的形式,或求解区域具有比较复杂的形状时,往往求不到或不易求到其精确解. 因此,实际的需要促使我们去寻求偏微分方程定解问题的近似解,特别是便于利用电子计算机求解的数值近似解,简称**数值解**.

求偏微分方程的数值解的方法是多种多样的,它本身已形成了一门独立的研究科目. 这里我们只着重说明,对偏微分方程定解问题的解的概念的各种不同理解,也同时为数值解法提供了不同的出发点,导至不同的数值求解方法. 这只要进行离散化,将相应的连续型问题转化为相应的离散型问题就可以了.

3.1 有限偏分法

对于狄利克雷问题 (2.1)~(2.2) 用定义 I 定义的精确解,要求得其相应的数值近似解,必须要将相应的微分方程问题(2.1)~(2.2)离散化,这就导致*有限差分法*.

为说明方便起见,设求解区域 Ω 为单位矩形 $\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$,见图 7.1. 近似求解的方法要点如下:

(1) 取步长 $h=\dfrac{1}{n}$($n>0$ 整数),用 $x=ih$ ($i=0,1,\cdots,n$) 及 $y=jh$ ($j=0,1,\cdots,n$) 这些平行于坐标轴的直线在区域上画出网格. 网格线的交点称为*节点*,其坐标为 $(x,y)=(ih,jh)$,简记为 (x_i,y_j) ($i,j=0,1,\cdots,n$)或(i,j). 近似处理的第一点是:代替求整个区域 Ω 上的解 $u=u(x,y)$,只要求在节点上解的近似值 u_{ij} ($i,j=0,1,\cdots,n$). 注意到当步长 h 愈来愈小时,网格将愈来愈密,这样近似的处理在 h 相当小时应该是合理的. 这样做,将求区域 Ω 上的一个函数的

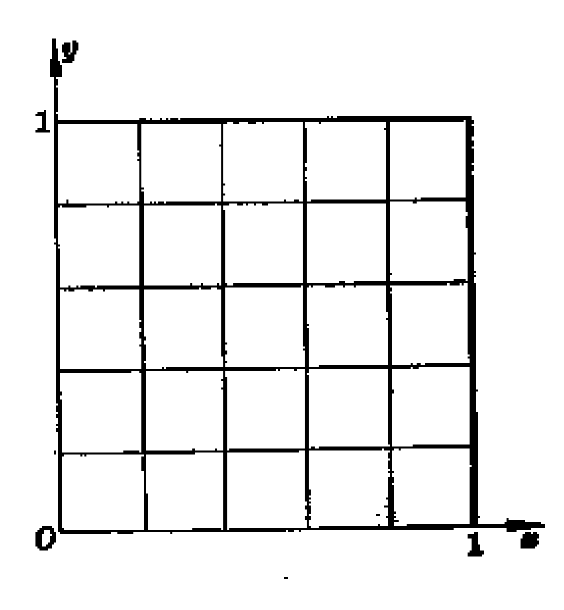


图 7.1

问题化为求在节点上的解的近似值这有限个数的问题，即将一个无限维的问题化为一个有限维的问题.

(2) 近似处理的第二点是：用差商来代替导数，即将方程中出现的偏导数近似地改为节点上解值的差商，从而将微分方程改为差分方程. 因为导数是相应的差商的极限，这样的处理在 h 相当小时也是合理的.

但是用差商来代替导数，却有多种的可能性. 例如对函数 $y=f(x)$ 的一阶导数 $f'(x)$ 来说，可分别用

前向差商 $\quad \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$,

后向差商 $\quad \dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}$,

或

中心差商 $\quad \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

等来近似代替. 因为利用泰勒(Taylor)展开式，容易证明，当 $h\to 0$ 时，上述这些差商均以 $f'(x)$ 为极限. 同样的原因，对于二阶导数 $f''(x)$，通常可用二阶中心差商

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

来近似等等. 这样，对同一个偏数分方程来说，往往可以列出多种多样的差分格式，我们可以根据实际求解的需要来进行优选，这就给偏微分方程的差分解法提供了丰富的内容和广阔的活动余地.

现在回到所考虑的狄利克雷问题(2.1)～(2.2). 对任一不落在边界 Γ 上的节点(称为内节点)(x_i, y_j)(见图 7.2)，将其上 u 对 x 及对 y 的二阶偏导数分别改成相应的二阶中心差商，并代入调和方程(2.1)，就得到在此节点处的相应的差分方程

$$\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h^2}=0, \qquad (3.1)$$

整理后即得

$$u_{ij}=\frac{1}{4}(u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1})$$

$$((i,\ j)\text{内节点}).\tag{3.2}$$

这说明在内节点 (i, j) 处的解值应等于周围东南西北四节点处解值的算术平均值. 这一事实是调和函数的平均值定理在差分方法离散化时的表现. (3.2) 通称为**五点格式**.

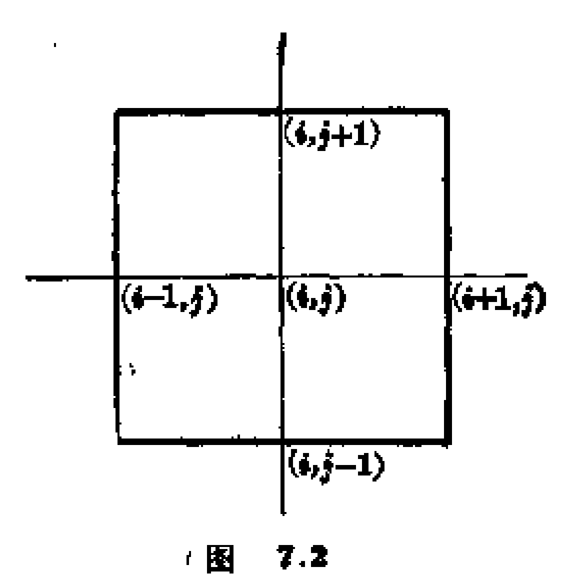


图 7.2

这样, 对每一个内节点 (x_i, y_j) 都可以列出形如 (3.2) 的一个方程, 而对落在边界 Γ 上的节点(称为**边界节点**), 其上的 u 值可由狄利克雷边界条件(2.2)直接给出, 是已知的:

$$u_{ij}=f(x_i,\ y_j)\quad ((i,\ j)\text{边界节点}).\tag{3.3}$$

因此, 对于每一个节点都可列出一个线性代数方程, 我们就得到一个以节点解值为未知数的线性代数方程组. 可以证明, 这个线性代数方程组恒有唯一的解, 且可以通过直接法或迭代法来求得, 它就是我们要求的狄利克雷问题 (2.1)～(2.2) 的(近似的)数值解. 我们还可以证明, 当步长 $h\to 0$ 时, 上述有限差分法所求得的数值解收敛于原问题(2.1)～(2.2)的精确解. 因此, 当步长相当小时, 可以用有限差分法来求得足够近似的解.

可以看到, 采用有限差分法的好处是对规则形状的区域列计算格式比较简便, 但当求解区域 Ω 具有比较复杂的形状时, 则需用多角形区域来加以近似, 此时所有节点虽仍可分为内节点和边界节点两类, 但对边界节点上的计算格式往往需要进行具体的处理, 而不易采用一个统一的计算程序来求解各种不同具体情况下的问题.

3.2 元体平衡法

现在考虑由定义 II 所给出的解. 为了求得其相应的数值解, 必须将条件 (2.3) 进行离散化处理, 这就导至另一种数值求解法,

称为元体平衡法.

(1) 首先仍设求解区域 Ω 为单位矩形 $\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$, 并仍借用前述的直交网格(见图7.1). 和有限差分法时一样, 近似处理的第一点是: 代替求整个区域 Ω 上的解 $u=u(x,\ y)$, 只要求在节点上解的近似值 $u_{ij}(i,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$.

(2) 近似处理的第二点是: 代替要求在任一闭环路 L 上成立平衡条件 (2.3), 改为在某些环绕节点的特定的闭环路 L 上成立(2.3)式. 这种围绕节点的特定的闭环路所包围的区域称为元体. 要求每一个节点都有一个相应的元体, 不同的元体间互不重迭, 而且所有这些元体正好合并成整个求解区域 Ω. 这样, 由在每个元体上成立平衡条件, 就可得出在整个区域 Ω 上成立平衡条件.

元体的选取方法原则上可以是相当任意的, 但为了求解的方便, 应尽可能采取比较简单的方式. 参照所给的直交网格, 对任一内节点 $(i,\ j)$, 可如图7.3中虚线所示的那样由过网节点的中点作平行于坐标轴的直线来构成相应的元体 $ABCD$. 而对于边界节点, 其所相应的元体可以类似地构造, 但大小只有上述元体 $ABCD$ 的一半或(在边界角点的情形)1/4. 由于边界条件(2.2), 在边界节点上的解值为已知, 即已有(3.3)式, 因此, 我们下面只对内节点考虑相应的元体, 并列出在其上的平衡条件

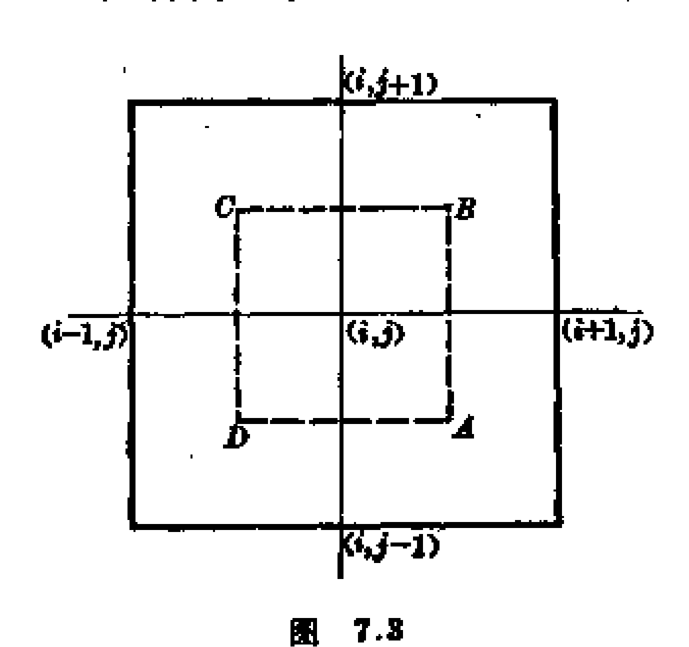


图 7.3

$$\int_{\substack{C\quad B\\ \boxed{(i,j)}\\ D\quad A}} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS=0 \quad ((i,\ j)\text{内节点}) \tag{3.4}$$

来代替原先的平衡条件(2.3).

(3) 近似处理的第三点是: 在元体平衡条件(3.4)中用差商代

替一阶偏导数. 注意到

$$\int_{\substack{C\quad B\\ \boxed{\cdot}\\ D\quad A}} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS=\int_{AB}\frac{\partial u}{\partial x}dy+\int_{CB}\frac{\partial u}{\partial y}dx-\int_{DC}\frac{\partial u}{\partial x}dy-\int_{DA}\frac{\partial u}{\partial y}dx,$$

近似地用相应的中心差商来代替上述右端第一项积分中的导数(参见图7.3),就有

$$\int_{AB}\frac{\partial u}{\partial x}dy\sim\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h}\cdot h=u_{i+1,j}-u_{i,j},$$

类似地,有

$$\int_{CB}\frac{\partial u}{\partial y}dx\sim u_{i,j+1}-u_{i,j},$$

$$\int_{DC}\frac{\partial u}{\partial x}dy\sim u_{i,j}-u_{i-1,j},$$

$$\int_{DA}\frac{\partial u}{\partial y}dx\sim u_{ij}-u_{i,j-1}.$$

将它们一起代入(3.4)式,就得到:对任一内节点(i,j),仍成立五点格式(3.2)式. 至于边界节点,则已有(3.3)式.

这样,和有限差分法的情形相同,对每一节点可得到一个线性代数方程,最后得到关于节点上解的近似值$u_{ij}(i,j=0,1,\cdots,n)$的一个线性代数方程组. 而且此时这个线性代数方程组和有限差分法情形所得到的线性代数方程组是完全一样的. 它有唯一的解,且当$h\to0$时,近似解收敛于原狄利克雷问题的精确解.

必须指出,如果在区域的一部分边界上给出的不是狄利克雷边界条件(2.2),而是诺伊曼边界条件或第三类边界条件,这时对这一部分边界上的节点,仍要通过在相应的元体上列出平衡条件来构造计算格式,而且在这些节点上所得的格式往往和有限差分法的情形不同.

上述方法基于在每个元体上列出平衡方程,故称为*元体平衡法*. 可以看到,这个方法所需要的实际上只是节点及其相应的元体,而一开始所画出的直交网格只起了陪衬和辅助的作用. 因此,元体平衡法和有限差分法不同,它对形状不规则的区域仍然可以方便地加以应用,这是它的一个突出的优点.

为了说明这一点，不妨设区域 Ω 是一个多角形，这时采用直交网格显然是不方便的，但仍可以，例如说，用下面的方法来确定节点并指定相应的元体，从而可用元体平衡法来列出相应的计算格式.

(A) 将区域 Ω 分割为有限个互不重迭的三角形元素(简称为*元素*)，要求每个三角形元素的顶点也是其相邻三角形元素的顶点，而不是其边的内点. 取这些三角形元素的顶点为*节点*，并按一定的顺序将其编号，分别记为 $1, 2, \cdots, N$. 这一步骤称为*有限元素分割*，由此所得到的节点配置方式自然是相当任意的，我们可以在对计算精度要求较高的地方配置较为密集的节点，但要求在节点疏密过渡时每个三角形元素的形状尽量比较规则(三内角大小相差不宜太悬殊)，以保证计算的精度. 这种有限元素分割方式的灵活性，是直交网格达不到的. 即使边界的形状比较复杂，也可以将边界节点直接地配置在边界上.

和前面一样，今后所要求的将只是解在节点上的近似值 $u_i(i=1, \cdots, N)$.

(B) 对每一内节点 i，可以根据所作的有限元素分割，构造一个相应的元体. 为此，对每一三角形元素 $e(i, j, m)$(见图 7.4)，利用三边的中线将它分为三块，并使每一块对应于一个相应的节点，作为环绕此节点所作的元体的一个组成部分. 对内节点 i，将其周围以其为顶点的一切三角形元素中对应于它的这一块合并起

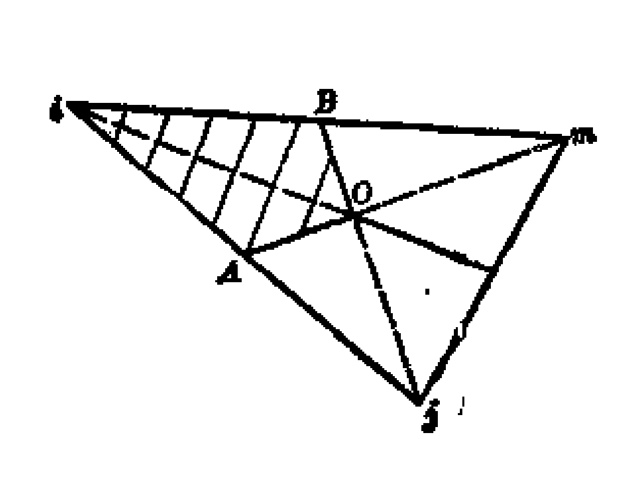


图 7.4

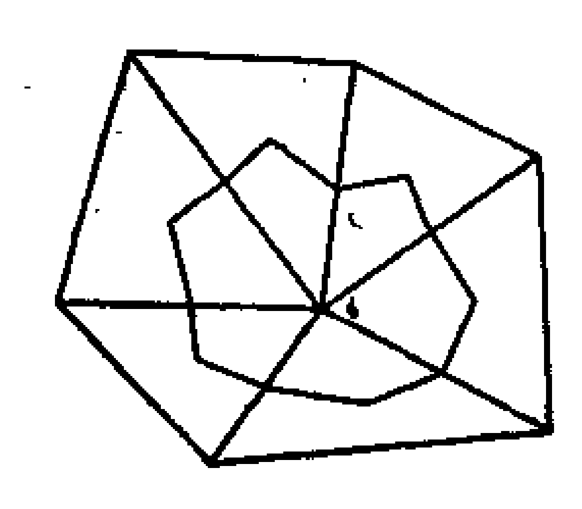


图 7.5

来，就得到围绕此节点的一个元体，见图 7.5.

这样，对每一个内节点有一个相应的(互不重迭的)元体，从而可列出在其上的平衡条件：在围绕 i 的元体边界上，成立

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \quad (i\text{内节点}). \tag{3.5}$$

至于边界节点，由于已有 (3.3) 式，我们不利用平衡条件来列计算格式(在诺伊曼条件或第三类边界条件的情形，对边界节点同样要利用在相应元体上的平衡条件来列计算格式).

(C) 现在要将 (3.5) 式的左端离散化，将它用节点上的解值来表示. 由于现在不是直交网格，不能直接将它写成差商的形式. 我们首先要根据节点上的解值 $u_i(i=1, \cdots, N)$，利用适当的插值方式，将 u 在整个求解区域 Ω 上的值补充起来，然后就可以计算(3.5)左端的积分.

为此，只需在每一三角形元素上进行插值即可. 任取一个三角形元素 e，其三顶点按逆时针顺序的编号设为 i, j, m (见图 7.4). 设 u 在这三节点上的值分别为 u_i, u_j 及 u_m. 在此三角形元素 e 上，u 的数值可认为是线性变化的(在元素 e 相当小时，这个假设是合理的近似)：

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \tag{3.6}$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为常数. 设三节点的坐标分别为 (x_i, y_i), (x_j, y_j) 及 (x_m, y_m)，由于 u 在此三节点上分别取值 u_i, u_j 及 u_m，故应有

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \\ u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j, \\ u_m = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m. \end{cases} \tag{3.7}$$

由此可决定出

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{2\Delta_e}(a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m), \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{2\Delta_e}(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m), \\ \alpha_3 = \dfrac{1}{2\Delta_e}(c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m), \end{cases} \tag{3.8}$$

其中

$$a_i=x_jy_m-x_my_j,\ b_i=y_j-y_m,\ c_i=x_m-x_j,\tag{3.9}$$

其余按指标 i, j, m 的顺序循环定义；而

$$\Delta_e=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix}\tag{3.10}$$

为此三角形元素 e 的面积. 将(3.8)式代入 (3.6) 式，就得到在元素 e 上的线性插值公式

$$u=\frac{1}{2\Delta_e}\sum_{i,j,m}(a_i+b_ix+c_iy)u_i,\tag{3.11}$$

其中求和记号表示对 i, j, m 轮流作和.

这样，如果给定节点上的数值，在每个元素上作上述的线性插值，在整个求解区域上就得到一个插值函数. 由于在两个相邻元素上分别插值所得的函数，在其公共边上必保持连续(称为满足相容性条件)，因此，在整个区域上所得的插值函数是一个分块线性的连续函数. 这种插值也称为分块线性插值.

利用上述插值，就可以计算 (3.5) 式中的环路积分. 为此，设 i 为所考察的内节点，只要说明对于上述的插值函数，如何计算 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在图 **7.4** 所示线段 AO 及 OB 上的积分即可. 由(3.11)式，在 $e(i, j, m)$上，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2\Delta_e}\sum_{i,j,m}b_iu_i,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2\Delta_e}\sum_{i,j,m}c_iu_i,\tag{3.12}$$

它们是节点值 u_i, u_j 及 u_m 的线性函数. 在已知三节点 i, j, m 的坐标后，线段 AO 及 OB 的长度及方向余弦也是易于计算的. 设 AO 之长度为 $|AO|$，其外法线方向余弦为 (α_x, α_y) (对元体来说为外法线方向)，则由(3.12)式有

$$\begin{aligned}\int_{AO}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS&=\int_{AO}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\alpha_x+\frac{\partial u}{\partial y}\alpha_y\right)dS\\ &=\frac{|AO|}{2\Delta_e}\left[\alpha_x\sum_{i,j,m}b_iu_i+\alpha_y\sum_{i,j,m}c_iu_i\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{|AO|}{2\Delta_e}\sum_{i,j,m}(\alpha_x b_i+\alpha_y c_i)u_i. \tag{3.13}$$

类似地可以得到 $\int_{OB}\frac{\partial u}{\partial n}dS$ 的表达式，它们都是节点值 u_i，u_j 及 u_m 的线性函数.

参见图7.5，将以 i 为节点的一切三角形元素上的上述积分相加，就可在对应于内节点 i 的元体上得到用(3.5)式表示的平衡条件.它是关于节点 i 及其周围一圈节点上的解值的一个线性代数方程，其具体表达式这里从略.

这样，对每一个内节点同样可以列出一个线性代数方程，而对每一边界节点则已有(3.3)式，因此，仍可得到一个以节点解值 $u_i(i=1, \cdots, N)$ 为未知数的线性代数方程组，这就是用元体平衡法所列的计算格式. 求解这个线性代数方程组，就得到原狄利克雷问题(2.1)～(2.2)的近似数值解.

3.3 有限元素法(里茨(Ritz)法)

现在考察对定义 III 所给出的解如何进行离散化，即考察如何对泛函 $J(v)$(见(2.12)式)求极小的变分问题进行离散化. 这导至另一种数值求解方法，称为*有限元素法*.

方法的要点如下：

(1) 仍不妨设 Ω 为一个多角形区域. 和3.2中一样对 Ω 进行三角形有限元素分割，将 Ω 分割为有限个互不重迭的三角形元素，并在每个元素上取一些点作为节点，最简单地可取三角形元素的三个顶点为节点. 为保持计算的精度，每个三角形元素的三个内角的大小相差不宜太悬殊，因此在节点疏密配置不均匀时，元素由小到大要逐步过渡.

对给定的有限元素分割，将节点按一定的顺序进行编号，分别记为1, $\cdots$, N；同时，将元素也按一定的顺序进行编号，分别记为1, $\cdots$, M. 和前面一样，近似处理的第一点是：今后所要求的仍只是解在节点上的近似值 $u_i(i=1, \cdots, N)$，从而将问题化为一个有限维的问题.

(2) 为了利用使泛函 $J(v)$ 取极小的条件来列计算格式，必须要求积分，因此，必须首先利用节点上的 $u_i(i=1, \cdots, N)$ 值通过插值得到整个区域 Ω 上的函数．这可以和上一段中一样地进行．在任一元素 $e(i, j, m)$ 上(见图 7.6)，若按逆时针顺序排列的三节点 i, j 及 m 的坐标分别为$(x_i, y_i)(x_j, y_j)$及(x_m, y_m)，其上的解值分别为 u_i, u_j 及 u_m，则在 e 上的插值函数可由(3.11)式给出．在每个元素上作如此的插值，在整个区域 Ω 上就得到一个连续且分块线性的插值函数，它完全由节点上的数值 $u_i(i=1, \cdots, N)$ 所唯一决定．由于(3.3)式，在边界节点上的解值是已知的，只有内部节点上的解值未知．为了说明方便起见，设内节点的个数为 $N_0(<N)$，且其编号分别为 $1, \cdots, N_0$，则上述分块线性插值函数完全由 $u_i(i=1, \cdots, N_0)$ 之值所唯一决定．在内节点上的数值 $u_i(i=1, \cdots, N_0)$变化时，相应的插值函数也发生变化，它们的全体构成一个插值函数类 V_h．这是一个有限维的集合，其维数等于内节点的个数 N_0．

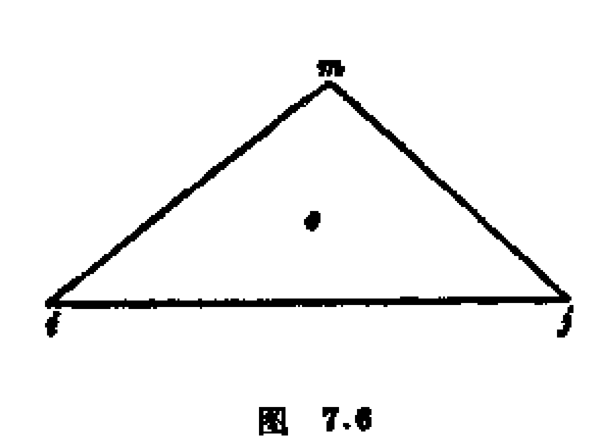


图　7.6

近似处理的第二点是：代替在由(2.10)式定义的集合 V 上考察泛函 $J(v)$ 的极小，改为在插值函数类 V_h 上考察泛函 $J(v)$ 的极小，即将定义 III 中所考察的变分问题(2.11)近似地改为

$$J(u)=\min_{v\in V_h} J(v), \quad u\in V_h. \tag{3.14}$$

因为在边界节点上的解值已由(3.3)式给定，(3.14)式意味着：要求出在内节点上的解值 $u_i(i=1, \cdots, N_0)$，使其相应的插值函数 u 所对应的总位能 $J(u)$，比在内节点上其它可能的解值 $v_i(i=1, \cdots, N_0)$所对应的插值函数 v 的总位能 $J(v)$ 为小．由于插值函数 v 由 $v_i(i=1, \cdots, N_0)$之值唯一决定，$J(v)$ 是一个包含 N_0 个自变数$v_i(i=1, \cdots, N_0)$的多元函数，因此，用(3.14)来代替(2.11)，就将一个泛函求极值的变分问题化为一个多元函数求极值的问题，

即将一个无限维的问题化为一个有限维的问题，而使问题得到了离散化.

注意到在元素 $e(i, j, m)$ 上，插值函数的一阶偏导数由(3.12)式给出，我们有

$$
\begin{aligned}
J(v) &= \iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy \\
&= \sum_{e=1}^{M}\iint\limits_{e}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy \\
&= \sum_{e=1}^{M}(v_i,\ v_j,\ v_m)\ \text{的二次函数} \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} k_{ij}v_iv_j,
\end{aligned}
$$

其中 $k_{ij}(i, j=1, \cdots, N)$ 是某些常数. 再用(3.3)式代入，得

$$
J(v)=\sum_{i,j=1}^{N_0} k_{ij}v_iv_j-\sum_{i=1}^{N_0} p_iv_i+c, \tag{3.15}
$$

其中 $p_i(i=1, \cdots, N_0)$ 及 c 为某些常数. 可以证明，这里的矩阵 $K=(k_{ij})\ (i, j=1, \cdots, N_0)$ 是一个对称正定阵，称为刚度阵.

由(3.14)式所示的极值性质，应成立

$$
\left.\frac{\partial J(v)}{\partial v_i}\right|_{v=u}=0 \quad (i=1, \cdots, N_0),
$$

于是

$$
\sum_{j=1}^{N_0} k_{ij}u_j=p_i \quad (i=1, \cdots, N_0). \tag{3.16}
$$

这就是内节点上的解值 $u_i(i=1, \cdots, N_0)$ 所应满足的一个线性代数方程组，它的系数阵是一个对称正定阵——刚度阵 $K=(k_{ij})$. (3.16) 就是用有限元素法所列出的计算格式. 解出它，就得到解在节点上的近似值. 可以证明，当元素以一定的方式愈分愈小时，所得的近似解必按某种意义收敛于原狄利克雷问题(2.1)～(2.2)的精确解.

我们指出，若采用同一有限元素分割，上述用有限元素法所列的计算格式和前段用元体平衡法所列的计算格式实际上是完全相同的. 然而，如果在一部分边界上给出的是诺伊曼条件或第三类

边界条件，在边界节点上二者所列的计算格式一般并不相同，而在此时，为了使用有限元素法，在泛函 $J(u)$ 中还必须添加一个边界积分项，这儿不再详细说明.

我们还指出，若特别采用由直交网格所导出的三角形有限元素分割（见图 7.7），则用上述有限元素法在内节点处所得的计算格式就是五点格式(3.2)，和有限差分法的情形是相同的.

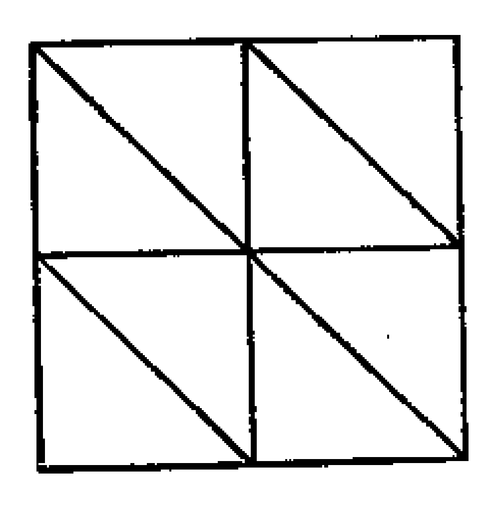


图 7.7

可以看到，节点配置的灵活性是有限元素法的一个优点. 又由于在列计算格式时各个元素的地位是平等的，因此可以用一个统一的方法来形成计算格式，易于将程序标准化，在使用电子计算机求解问题时特别方便，这是有限元素法的又一个突出的优点. 此外，有限元素法的核心是元素，即元素的形状、元素上节点的配置方式以及其上的插值方式，这三者又是密切联系着的. 上面所用的元素，形状是三角形，节点是其三顶点，采用的是线性插值，可称为*三角形线性插值元素*. 它只是一种可能使用的元素形式，而且是最简单的一种元素形式. 还可以构造出多种多样的元素形式，从而可以通过改善元素的性能来不断提高计算的精度，这是其它方法所不及的，也使有限元素法这一数值计算方法具有十分丰富的内容和多种多样的面貌.

3.4 有限元素法（伽辽金（Галёркин）法）

现在简单地考察如何将定义 IV 给出的解进行离散化，由此所得的数值求解方法仍称为有限元素法. 为区别起见，将上一段中所述的有限元素法称为*里茨法*，而将本段所述的称为*伽辽金法*.

仍设 Ω 为一个多角形区域，并和上一段那样进行三角形有限元素分割. 近似处理的第一步仍是只考察解在内节点的近似值 $u_i(i=1, \cdots, N_0)$.

由于在定义 IV 的 (2.18) 式中涉及到两个函数 u 及 w, 为了将此式离散化, 除了应要求 u 属于前一段所定义的插值函数类 V_h 以外, 还必须对试验函数 w 作类似的处理. 由于 $w|_\Gamma=0$, 最方便的一个方法就是对同一有限元素分割, 要求 $w\in V_h^0$, 其中 V_h^0 表示在边界节点上取零值时所构造的插值函数类. 由于在边界节点上取零值, V_h^0 是一个有限维的线性空间, 其维数仍等于内节点的个数 N_0. 这样, 就可以将(2.18)式近似地改为

$$u\in V_h, \quad \iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dxdy=0 \quad \forall w\in V_h^0. \tag{3.17}$$

对任何 $i=1, \cdots, N_0$, 以 $w_i(x, y)$ 表示在内节点 i 取值为 1, 而在其余节点取值为零时所构成的插值函数, 它是一个“伞状函数”. 显然, $w_i(x, y)\in V_h^0$; 且对任何 $w(x, y)\in V_h^0$, 设其在内节点分别取值 $g_1, g_2, \cdots, g_{N_0}$, 则显然有

$$w(x, y)=\sum_{i=1}^{N_0} g_i w_i(x, y).$$

因此, $\{w_i(x, y)\}(i=1, \cdots, N_0)$是线性空间 V_h^0 的一组基. 这样, (3.17)式就可以等价地改写为

$$u\in V_h, \iint_\Omega\left(\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial w_i}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w_i}{\partial y}\right)dx\,dy=0$$

$$(i=1, \cdots, N_0) \tag{3.18}$$

由(3.12)式, 这里共有 N_0 个以内节点处解值 $u_i(i=1, \cdots, N_0)$ 为未知数的线性代数方程, 即是一个线性代数方程组. 解出它, 就可以得到解在节点上的近似值.

由于定义 III 及定义 IV 的等价性, 而 u 及 w 又均用同一插值方式进行插值, 上述做法所最后列出的计算格式和上一段中用里茨法列出的计算格式是完全相同的, 即此时这两种数值求解方法是等价的.

但是, 如果对定义 IV 中出现的两个函数 u 及 w, 分别采用不同的方式进行插值, 例如采用不同的有限元素分割方式, 或采用不

同精度的插值等等，就可以导至不同的计算格式．具体说来，若要求 $u\in V_h$, $w\in W_h^0$, 而 V_h 与 W_h^0 是分别用不同的方式所得到的插值函数类，但例如说具有相同的维数，就可以得到相应的计算格式为

$$u\in V_h,\quad \iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dx\,dy=0$$

$$\forall w\in W_h^0. \tag{3.19}$$

这就和前一段中用里茨法所得的计算格式不同．因此，基于定义 IV 的数值求解方法可以含有更丰富的内容．

我们还指出，由 §2 中的讨论可以看到，由定义 IV 所定义的解，可以看成是用试验函数 w 乘微分方程，然后在 Ω 上进行分部积分而得到的．因此，对一些不能化为变分问题来求解的问题，仍可以利用试验函数来定义它的广义解，从而给出其相应的数值计算方法．

综上所述，我们对同一狄利克雷问题(2.1)～(2.2)，基于对解的概念的不同理解，分别介绍了数值求解的四种常用的方法．可以看到：每一方法都有其特点及优点，而且在特定的情况下还给出相同的计算格式．此外，不同的方法在各自范围内都有其或大或小的变通性，这为我们提供了多种的选择余地，在具体使用这些方法的时候应该充分地注意到这一点．

习　题

1．证明：用有限差分法所列的计算格式(3.2)及(3.3)恒有唯一的解．

2．若对所考察的有限元素分割，没有一个元素是钝角三角形，证明此时对狄利克雷问题(2.1)～(2.2)用元体平衡法所列的计算格式，必成立极值原理，即除非节点上的解值恒等于常数，在内节点处的解值不可取到在所有节点上的解值的最大值或最小值．由此证明用元体平衡法得到的计算格式恒有唯一的解．

3．证明出现在 (3.15) 式中的刚度阵 $K=(k_{ij})(i,\ j=1,\ \cdots,\ N_0)$ 是一个对称正定阵．

4．证明对狄利克雷问题 (2.1)～(2.2) 若采用同一有限元素分割，则用

有限元素法所列的计算格式与用元体平衡法所列的计算格式是完全相同的。

5. 证明：若采用图7.7所示的有限元素分割，则用有限元素法在任一内节点处所列的计算格式必为五点格式(3.2)。

6. 证明：若采用同一有限元素分割，且u及w采用同一插值方式进行插值，则对狄利克雷问题(2.1)～(2.2)，用里茨法和用伽辽金法所得的计算格式是完全相同的。

附录一　傅立叶级数

我们知道，任一周期为 $2L$ 的函数 $f(x)$，当它满足一定的条件（例如说在 $[-L, L]$ 上分段连续或更弱的条件）时，总可以展开成傅立叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k \sin\frac{k\pi x}{L}\right), \tag{1}$$

其中

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx \quad (k=0, 1, 2, \cdots), & (2) \\ b_k = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx \quad (k=1, 2, \cdots). & (3) \end{cases}$$

特别，若 $f(x)$ 是 $[-L, L]$ 上的奇函数，有

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx. \tag{4}$$

此时的傅立叶级数展开式为正弦级数：

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{L}. \tag{5}$$

而当 $f(x)$ 是 $[-L, L]$ 上的偶函数时，有

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx, \quad b_k = 0. \tag{6}$$

此时的傅立叶级数展开式为余弦级数：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{L}. \tag{7}$$

这样，对定义在区间 $[0, L]$ 上的函数 $f(x)$，利用奇延拓，可以将它展开为 $[0, L]$ 上的正弦级数 (5)；也可以利用偶延拓，将它展开为 $[0, L]$ 上的余弦级数 (7)。

关于傅立叶级数，成立下述

引理 1（帕塞瓦尔(Parseval)等式）　设 $f(x)$ 在 $[-L, L]$ 上分段连续，则成立

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f^2(x)\,dx, \tag{8}$$

其中 a_k 及 b_k 分别由(2)及(3)式定义.

证明从略.

下一引理可用来判定傅立叶级数的一致收敛性及将其逐项微分后所得级数的一致收敛性.

引理 2 若 $f(x)$ 是区间 $[0, L]$ 上的连续函数，它本身及其直至 m 阶的导数连续，$m+1$ 阶导数分段连续，且

$$f^{(n)}(0)=f^{(n)}(L)=0 \quad \left(n=0, 2, \cdots, 2\left[\frac{m}{2}\right]\right). \tag{9}$$

将函数 $f(x)$ 在区间 $[0, L]$ 上展开为正弦级数

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi x}{L}, \tag{10}$$

则由系数 a_k 所构成的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^m|a_k| \tag{11}$$

是收敛的，从而 $f(x)$ 的正弦级数展开式可逐项求导 m 次.

证明 由于假设 $f(x)$ 的 $m+1$ 阶导数分段连续，因此 $f^{(m+1)}(x)$ 可以在区间 $[0, L]$ 上展开成傅立叶级数. 当 m 为奇数时，展开式为

$$f^{(m+1)}(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(m+1)}\sin\frac{k\pi x}{L};$$

当 m 为偶数时，展开式为

$$f^{(m+1)}(x)\sim\frac{a_0^{(m+1)}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(m+1)}\cos\frac{k\pi x}{L}.$$

现计算傅立叶系数 $a_k^{(m+1)}$. 当 m 为奇数时，由引理条件，利用 $f^{(m-1)}(0)=f^{(m-1)}(L)=0$，可得

$$\begin{aligned}a_k^{(m+1)}&=\frac{2}{L}\int_0^L f^{(m+1)}(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{L}d\xi\\&=\frac{2}{L}\left[f^{(m)}(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{L}\right]_0^L\\&\quad-\frac{2}{L}\cdot\frac{k\pi}{L}\int_0^L f^{(m)}(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{L}d\xi\end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{L}\cdot\frac{k\pi}{L}\left[f^{(m-1)}(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{L}\right]_0^L$$

$$-\frac{2}{L}\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2\int_0^L f^{(m-1)}(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{L}d\xi$$

$$= -\frac{2}{L}\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2\int_0^L f^{(m-2)}(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{L}d\xi.$$

如果继续进行,可以得到

$$a_k^{(m+1)} = (-1)^{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{k\pi}{L}\right)^{m+1} a_k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots).$$

当 m 为偶数时,类似地可以得到

$$a_k^{(m+1)} = (-1)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{k\pi}{L}\right)^{m+1} a_k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots).$$

由引理 1, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k^{(m+1)}|^2 \leqslant \frac{2}{L}\int_0^L [f^{(m+1)}(x)]^2 dx < \infty,$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2m+2}\cdot a_k^2 < \infty.$$

再由柯西不等式,就得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m\cdot|a_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} k^{2m+2}|a_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}} < \infty.$$

引理证毕。

附录二 傅立叶变换

可以证明，若 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可微，且绝对可积，必成立

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi. \tag{1}$$

这个积分表达式称为 $f(x)$ 的傅立叶积分，它是有限区间上的傅立叶级数在无穷区间情形的推广. 由于 $\cos\lambda(x-\xi)$ 是 λ 的偶函数，$\sin\lambda(x-\xi)$ 是 λ 的奇函数，可以将(1)式改写为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\left[\cos\lambda(x-\xi)+i\sin\lambda(x-\xi)\right]d\xi \tag{2}$$

或

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi. \tag{3}$$

它称为复数形式的傅立叶积分公式.

这样，若令

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi, \tag{4}$$

就有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda. \tag{5}$$

我们称由(4)式引进的函数 $g(\lambda)$ 为 $f(x)$ 的傅立叶变换，记为 $F[f]$. 同理，称由(5)式引进的函数 $f(x)$ 为 $g(\lambda)$ 的傅立叶逆变换，记为 $F^{-1}[g]$. 如上述，如果 $f(x)$ 满足一定的条件，例如在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可微且绝对可积，那末它的傅立叶变换存在，而且其逆变换等于 $f(x)$，即成立

$$f(x)=F^{-1}[F[f]], \tag{6}$$

$$g(\lambda)=F[F^{-1}[g]]. \tag{7}$$

以下我们总假设所讨论的函数 $f(x)$ 具有上述性质.

傅立叶变换在求解数学物理方程时有很多应用. 下面我们介

绍它的一些基本性质. 在推导这些性质时, 所遇到的有关函数的傅立叶变换均假设是有意义的, 有关的一切运算也都假设是可行的, 而不一一加以指明. 因此, 利用这些性质来求解数学物理方程的问题, 只能先给出问题的形式解, 然后再设法进行验证.

性质 1　傅立叶变换是线性变换: 设 α, β 是两个任意实数, 则成立

$$F[\alpha f_1+\beta f_2]=\alpha F[f_1]+\beta F[f_2]. \tag{8}$$

对逆变换也有同样的结果.

性质 2　傅立叶变换的平移公式(或称延迟公式)

$$F[f(x-x_0)]=F[f]e^{-i\lambda x_0}. \tag{9}$$

证明　由定义

$$\begin{aligned} F[f(x-x_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi-x_0)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)e^{-i\lambda\eta}\,d\eta\cdot e^{-i\lambda x_0} \\ &= F[f]\cdot e^{-i\lambda x_0}. \end{aligned}$$

称函数

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t)f_2(t)\,dt \tag{10}$$

为函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的卷积, 记为 $(f_1*f_2)(x)$. 易知成立

$$(f_1*f_2)(x)=(f_2*f_1)(x).$$

性质 3　$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 卷积的傅立叶变换等于 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的傅立叶变换的乘积, 即

$$F[f_1*f_2]=F[f_1]\cdot F[f_2]. \tag{11}$$

证明　由定义

$$\begin{aligned} F[f_1*f_2] &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1*f_2)(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi-t)f_2(t)\,dt\right)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi, \end{aligned}$$

再交换积分次序可得

$$F[f_1*f_2]=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi-t)\,e^{-i\lambda\xi}\,d\xi\right)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)e^{-i\lambda(x+t)}dx\,dt$$

$$=F[f_1]\cdot F[f_2].$$

令 $$g_1=F[f_1],\ g_2=F[f_2],$$

就有 $$f_1=F^{-1}[g_1],\ f_2=F^{-1}[g_2],$$

于是 (11) 式又可写为更便于应用的形式:

$$F^{-1}[g_1g_2]=F^{-1}[g_1]*F^{-1}[g_2]. \tag{12}$$

从傅立叶变换和逆变换公式之间的相似性，可以类似地得到

性质 4 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 相乘后的傅立叶变换等于 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 分别进行傅立叶变换后的卷积的 $\frac{1}{2\pi}$ 倍，即

$$F[f_1\cdot f_2]=\frac{1}{2\pi}F[f_1]*F[f_2]. \tag{13}$$

$f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的傅立叶变换和 $f(x)$ 的傅立叶变换之间存在下述重要的关系.

性质 5 如果 $f(x)$, $f'(x)$ 都可以进行傅立叶变换，且当 $|x|\to\infty$ 时，$f(x)\to 0$，则成立关系式

$$F[f'(x)]=i\lambda F[f(x)]. \tag{14}$$

证明 由定义

$$F[f'(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} f'(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi$$

$$=f(\xi)\,e^{-i\lambda\xi}\Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty}+\int_{-\infty}^{\infty} i\lambda f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi$$

$$=i\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi=i\lambda F[f(x)].$$

类似地，对高阶导数可得

$$F[f^{(n)}(x)]=(i\lambda)^n F[f(x)]. \tag{15}$$

性质 6 如果 $f(x)$ 和 $xf(x)$ 都可以进行傅立叶变换，则

$$F[-ixf(x)]=\frac{d}{d\lambda}F[f]. \tag{16}$$

证明 $F[-ixf(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}-i\xi f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi$

$$=\frac{d}{d\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi=\frac{d}{d\lambda}F[f].$$

注意到求导和积分互为逆运算，易知成立

性质 7 若 $f(x)$，$\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi$ 均可进行傅立叶变换，且当 $|x|\to\infty$ 时，$\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi\to 0$，则成立关系式

$$F\left[\int_{x_0}^{x}fdx\right]=\frac{1}{i\lambda}F[f(x)]. \tag{17}$$

对多个自变数的函数 $f(x)$，其傅立叶变换可以类似地定义如下：

$$g(\lambda)=F[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\cdot\xi}d\xi, \tag{18}$$

而其逆变换为

$$f(x)=F^{-1}[g(\lambda)]=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{i\lambda\cdot x}d\lambda, \tag{19}$$

其中 $x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)$，$\xi=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)$，$\lambda=(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n)$，

$$\lambda\cdot\xi=\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_n\xi_n, \tag{20}$$

$$d\xi=d\xi_1\cdots d\xi_n,\qquad d\lambda=d\lambda_1\cdots d\lambda_n.$$

此时上述有关傅立叶变换的一些性质只要在形式上作如下修改后仍然成立：

$$f_1*f_2=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x-t)f_2(t)dt,$$

$$F[f(x-x_0)]=F[f]e^{-i\lambda x_0},$$

$$F[f_1\cdot f_2]=\frac{1}{(2\pi)^n}F[f_1]*F[f_2],$$

$$F\left[\frac{\partial}{\partial x_k}f(x)\right]=i\lambda_k F[f],$$

$$F[-ix_k f(x)]=\frac{\partial}{\partial\lambda_k}F[f]$$

等。

附录三 δ 函 数

§1 δ函数的概念

δ函数首先是由于在物理学中考察集中分布量的需要而产生的. 这些集中分布的量, 例如集中质量、集中电荷等, 可以近似地认为集中在一些孤立的点, 而不必关心实际具有这些质量或载有这些电荷的物体究竟有多大体积. 以这样方式来处理问题, 往往是十分方便且有效的, 例如在天体力学中, 就将地球、太阳等都视为质点来求解问题. 但是, 在我们要同时处理分布质量或分布电荷的情形, 就产生了一些困难.

以质量分布问题为例. 我们通常利用密度函数来描述连续分布的质量. 对于空间一点(x, y, z), 作包含这点的一个邻域Ω_0, 其体积为ΔV, 而在Ω_0中物体的质量为ΔM, 则

$$\rho(x, y, z)=\lim_{\Omega_0\to(x,y,z)}\frac{\Delta M}{\Delta V} \tag{1.1}$$

称为物体在该点(x, y, z)的密度. 反之, 若知道了物体的密度函数$\rho(x, y, z)$, 就可以得知在区域Ω中的质量是

$$M=\iiint_{\Omega}\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \tag{1.2}$$

在通常的情形下, 总假定(1.1)式中的极限存在, 且$\rho(x, y, z)$为连续函数(至少是分块连续的); 而对于给定的一个分块连续函数$\rho(x, y, z)$, 积分(1.2)总存在. 这样, 有关的物理问题能顺利地利用经典分析的工具加以处理, 就像在连续介质力学中所做的那样.

然而当我们考察集中质量的情形时, 就无法按(1.1)定义其密度函数. 因为若在原点集中若单位质量, 则当$(x, y, z)\neq(0, 0, 0)$时, 按(1.1)式可知$\rho(x, y, z)=0$; 而当$(x, y, z)=(0, 0, 0)$时, 对于任意的包含该点的区域Ω_0, 都有$\Delta M=1$, 从而当$\Delta V\to0$

时，必有 $\frac{\Delta M}{\Delta V}\to+\infty$.

尽管如此，人们仍然希望对集中质量也能相应地定义一个密度函数，以便与分布质量情形统一处理．一开始就有人直接将集中质量的密度函数称为 δ 函数，并将它定义为在一点取值为 $+\infty$，而在其余点取值为 0 的函数，将 δ 函数与普通意义下的函数放在一起加以运算或应用．

然而，这样来了解或定义 δ 函数是不能令人满意的，它存在很多含混之处．我们知道，$+\infty$ 只是一个表示变化趋势的符号，它并不是一个"很大的数"；而且用这种定义也无法将在一点集中了一个单位质量与在该点集中了两个单位质量等不同情形区别开来．

也有人试图很据质量由密度的积分来表示的这一事实来定义 δ 函数，他们称 δ 函数是这样一种函数：它在不含原点的任一区域中积分为零，而在含原点任一区域中积分为 1．这样的定义虽然可以将在原点集中质量的多少表示出来，但是通过简单的分析可以看到，如果将积分理解为普通意义下的积分（如黎曼积分、勒贝格积分等），δ 函数在原点以外必须是零，而在原点处的数值仍无法按普通意义来定义．这样，此时被积函数及积分的确切意义是什么，仍然很不清楚．

还有一种办法是将 δ 函数放在一个极限过程中来了解．以一维空间为例，作函数序列 $\{\delta_h(x)\}$，其中

$$\delta_h(x)=\begin{cases}0, & x<-h \text{ 或 } x>h,\\ \frac{1}{2h}, & -h\leqslant x\leqslant h,\end{cases}\tag{1.3}$$

它表示在长度为 $2h$ 的区间 $[-h,h]$ 上集中了总量为一个单位的质量．当 $h\to0$ 时，就可用此序列的"极限"来表示 δ 函数．用这一方法来描述 δ 函数，虽比上述两种方法前进了一步，然而所述"极限"的确切意义是什么，仍然是需要加以说明的．

直到本世纪四十年代，法国数学家薛瓦尔兹（L. Schwartz）在

前人工作的基础上提出的分布理论才给 δ 函数以至更一般的广义函数奠定了严格的数学基础. 他的基本想法就是把 δ 函数视为在某个函数空间(称为基本空间)上定义的一个线性连续泛函. 例如, 将在实数轴上(或者在某一区间 (a, b) 上)定义的且在某内闭区间外为零的 C^∞ 函数全体组成基本空间 K, 则对任意给定的一个连续函数(或一般地, 勒贝格可积函数) $f(x)$, 就可以将它视为 K 上的一个线性连续泛函. 这是因为, 对任何 $\varphi(x)\in K$, 可以定义积分

$$(f, \varphi)=\int f(x)\varphi(x)dx, \tag{1.4}$$

从而我们得到了空间 K 上的一个泛函. 这个泛函显然是线性的; 在适当地规定了 K 上的拓扑以后, 还可知它是一个连续泛函. 这个泛函是由 $f(x)$ 所唯一确定的, 于是可以把这个泛函与 $f(x)$ 视为同一元素, 并仍记为 f. 然而在 K 空间上的线性连续泛函的全体要比上述勒贝格可积函数的全体多得多, 我们就把 K 空间上所有的线性连续泛函均称为*广义函数*. 其中就有一个广义函数具有前面所述的 δ 函数的性质, 它就是由泛函

$$(\delta, \varphi)=\varphi(0) \quad \forall\varphi(x)\in K \tag{1.5}$$

所对应的广义函数. 这个广义函数就称为 *δ 函数*, 并记为 $\delta(x)$. 相仿地, 可定义 $\delta(x-x_0)$ 为

$$(\delta(x-x_0), \varphi)=\varphi(x_0) \quad \forall\varphi(x)\in K.$$

由于广义函数是基本空间上的线性连续泛函, 因此, 采取不同的基本空间将导至不同的广义函数. 上述在空间 K 上的线性连续泛函称为 K 广义函数, 它是最常用的广义函数. 在一切常用的广义函数类中都包含通常意义下的连续函数或勒贝格可积函数, 也包含由 (1.5) 式所定义的 δ 函数. 在本书中, 我们只准备涉及 K 广义函数.

可以按泛函弱极限的概念来确定广义函数的极限关系, 称之为*弱极限*. 设 $\{F_n\}$ 为一个 K 广义函数序列, 而 F 也是一个 K 广义函数, 如果当 $n\to\infty$ 时, 对任何 $\varphi\in K$ 成立

$$(F_n, \varphi)\to(F, \varphi),$$

就称 F_n 弱收敛于 F，或 F 是 $\{F_n\}$ 的弱极限。

我们现在证明按(1.3)式定义的序列 $\{\delta_h(x)\}$ 以 δ 函数为弱极限．即证明对任何 $\varphi\in K$，成立

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_h(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(0). \tag{1.6}$$

事实上，由 $\delta_h(x)$ 的定义及积分中值定理

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_h(x)\varphi(x)\,dx=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\varphi(x)\,dx=\varphi(\xi),$$

其中 $\xi\in(-h,\ h)$，于是立刻得到(1.6)式。

弱收敛于 δ 函数的函数列并不是唯一的，见下面的一些例子，请读者自行验证它们满足类似于(1.6)的关系式。

【例 1.1】　定义(参见图 1)

$$f_h(x)=\begin{cases}0, & |x|>h,\\ \dfrac{1}{h^2}(x+h), & -h\leqslant x\leqslant 0,\\ -\dfrac{1}{h^2}(x-h), & 0\leqslant x\leqslant h,\end{cases} \tag{1.7}$$

则 $\{f_h(x)\}$ 以 δ 函数为弱极限。

【例 1.2】　记

$$g_t(x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}, \tag{1.8}$$

它是热传导方程柯西问题的泊松公式中的核函数(参见图 2)，则在弱收敛的意义下成立

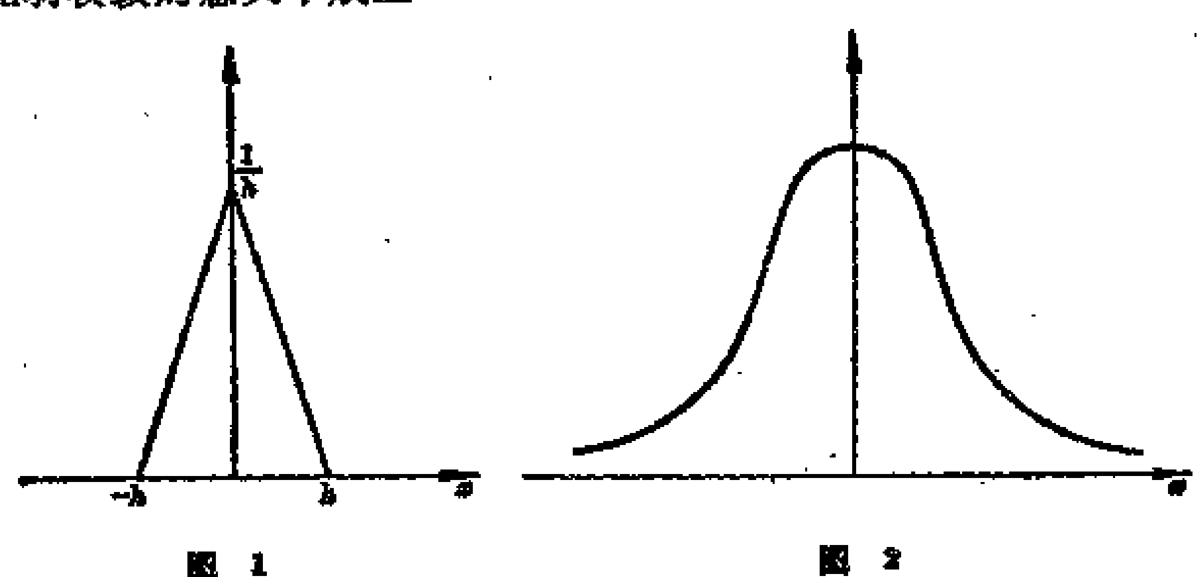


图 1　　　　　　图 2

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} g_t(x)=\delta(x).$$

【例 1.3】 记圆上调和方程狄利克雷问题解的泊松公式中的核函数为

$$\psi_r(\theta)=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2},\tag{1.9}$$

则在弱收敛的意义下成立

$$\lim_{\substack{r\to R\\ r<R}} \psi_r(\theta)=\delta(\theta).$$

习 题

1. 分别完成例 1.1, 1.2 及 1.3 中所述的弱收敛性的证明.
2. 试证明 $\frac{1}{\pi}\frac{\sin\nu x}{x}$ 在 $\nu\to\infty$ 时以 $\delta(x)$ 为弱极限.

§2 δ 函数的运算

将普通函数的概念扩充到广义函数以后，还需要把普通函数的运算法则也作相应的推广. 限于篇幅，这里仅讨论 δ 函数的微分运算与傅立叶变换.

设 K 为在 §1 中所述的在实轴上的基本空间，若 $f(x)$ 为普通的连续可微函数，则由分部积分公式，对任何 $\varphi\in K$ 成立

$$\int f'(x)\varphi(x)\,dx=-\int f(x)\varphi'(x)\,dx.\tag{2.1}$$

(2.1) 式也可以解释为：函数 f 的导数对应着一个线性连续泛函 f'，其定义为

$$(f',\varphi)=-\int f(x)\varphi'(x)\,dx\quad \forall\varphi\in\Phi.$$

将这个原则推广到广义函数，就可类似地定义 δ 函数的导数. 为此，定义 $\delta(x)$ 的一阶导数 δ' 是一个线性连续泛函，它作用于函数 $\varphi\in K$ 时取值为 $-\varphi'(0)$：

$$(\delta',\varphi)=-\int\delta(x)\varphi'(x)\,dx=-\varphi'(0).\tag{2.2}$$

同样，对于 δ 函数的 n 阶导数可定义为

$$(\delta^{(n)},\varphi)=(-1)^n\varphi^{(n)}(0).\tag{2.3}$$

再考察广义函数的傅立叶变换. 我们知道，对于一个在实轴

上绝对可积的函数 $f(x)$，其傅立叶变换定义为

$$\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx,$$

因此，对于任何 $\varphi(\xi)\in K$，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\xi}f(x)\varphi(\xi)\,dx\,d\xi\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\xi}\varphi(\xi)\,d\xi\right)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\hat{\varphi}(x)\,dx,\end{aligned}\tag{2.4}$$

式中 $\hat{\varphi}(x)$ 是函数 $\varphi(\xi)$ 的傅立叶变换．将这个事实推广到广义函数，对 δ 函数，就可定义它的傅立叶变换为

$$(\hat{\delta},\ \varphi)=(\delta,\ \hat{\varphi})=\hat{\varphi}(0).\tag{2.5}$$

这里需要说明的是，当 $\varphi\in K$ 时，φ 的傅立叶变换 $\hat{\varphi}$ 一般不具有紧支集，从而不含于基本空间 K 中，但由于 δ 函数作用于一个函数 φ 时，其结果只与 φ 在原点的取值有关，故事实上 δ 函数可视为更广的函数空间上的线性连续泛函，而使(2.5)式仍是有意义的．

由(2.5)式可知，对任意 $\varphi\in K$ 成立

$$(\hat{\delta},\ \varphi)=\hat{\varphi}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,d\xi=(1,\ \varphi),$$

所以 $\delta(x)$ 的傅立叶变换是 1，即

$$\hat{\delta}(x)=1.\tag{2.6}$$

反之，1 的傅立叶逆变换就是 $\delta(x)$．

关于 $\delta(x-x_0)$ 与 $\delta^{(n)}(x)$ 的傅立叶变换可按下面的方法决定．由于

$$\begin{aligned}(\widehat{\delta(x-x_0)},\ \varphi)&=(\delta(x-x_0),\ \hat{\varphi})=\hat{\varphi}(x_0)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix_0\xi}\varphi(\xi)\,d\xi=(e^{-ix_0\xi},\ \varphi),\end{aligned}$$

故

$$\widehat{\delta(x-x_0)}=e^{-ix_0\xi}.\tag{2.7}$$

又注意到附录二中的性质 6(即(16)式)，有

$$(\hat{\delta}^{(n)}, \varphi) = (\delta^{(n)}, \hat{\varphi}) = (-1)^n \frac{d^n \hat{\varphi}}{dx^n}(0)$$

$$= (-1)^n \widehat{[(-i\xi)^n \varphi]}(0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} i^n \xi^n \varphi(\xi) d\xi,$$

故

$$\widehat{\delta^{(n)}(x)} = (i\xi)^n. \tag{2.8}$$

对多个自变数的δ函数，可以类似于一个自变数的情形进行定义，并成立类似的运算法则.

习　题

1. 试求 $\delta^{(n)}(x-x_0)$ 的傅立叶变换.
2. 求 $\delta(x)$ 的傅立叶逆变换.
3. 若 $\theta(x)$ 为黑维赛德(Heaviside)函数:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

试证 $\theta'(x) = \delta(x)$.

§3　应用δ函数求基本解

如第五章中所述，微分算子 L 的基本解 E 可以定义为方程 $LE=\delta$ 的解. 算子 L 的柯西问题的基本解也可定义为初值是 $\delta(x)$ 的柯西问题的解. 现在我们利用前面所介绍的关于δ函数的运算法则，来求热传导方程与波动方程柯西问题的基本解. 在此指出，由于对广义函数已建立了坚实的理论基础，利用δ函数求基本解的过程均可严格地进行推导. 但由于在本书中不可能对广义函数的基本理论作详细的介绍，以下的推导过程不妨视为形式运算的过程. 要断定这种形式运算过程的合理性，只须对最后所得的解进行验证就可以了.

【例3.1】 热传导方程柯西问题的基本解.

考察柯西问题

$$\begin{cases} LE \triangleq \dfrac{\partial E}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0, \\ t=0:\ E = \delta(x). \end{cases} \tag{3.1}$$

在两端对 x 作傅立叶变换，注意到(2.6)，可得

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{E}}{dt} = -a^2\xi^2\hat{E}, \\ t=0:\ \hat{E}=1. \end{cases} \tag{3.2}$$

这个常微分方程初值问题的解为

$$\hat{E}(\xi, t) = e^{-a^2\xi^2 t}.$$

求其傅立叶逆变换，即得热传导方程柯西问题的基本解为(参见第二章§3)

$$E(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \tag{3.3}$$

有了此基本解 $E(x, t)$，热传导方程取初始条件 $u(x, 0) = \varphi(x)$ 的解就可以写成卷积 $(E(x-\xi, t), \varphi(\xi))$ 的形式. 这是因为由 $LE=0$，有

$$L(E(x-\xi, t), \varphi(\xi)) = (LE(x-\xi, t), \varphi(\xi)) = 0;$$

此外，有

$$(E(x-\xi, 0), \varphi(\xi)) = (\delta(x-\xi), \varphi(\xi)) = \varphi(x).$$

这样，我们可以由基本解(3.3)导出热传导方程上述柯西问题解的公式为

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{3.4}$$

这就是在第二章中已得到的泊松公式.

【例 3.2】 三维波动方程柯西问题的基本解.

今考察三维波动方程的柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 E}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 E}{\partial x_3^2}\right), \\ t=0:\ E=0,\ \dfrac{\partial E}{\partial t} = \delta(x_1, x_2, x_3). \end{cases} \tag{3.5}$$

对上述诸式两端均关于变量 x_1, x_2, x_3 作傅立叶变换，得到

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\hat{E}}{dt^2}+a^2(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)\hat{E}=0,\\ t=0:\ \hat{E}=0,\ \dfrac{d\hat{E}}{dt}=1.\end{cases}\tag{3.6}$$

这个问题的解为

$$\hat{E}=\frac{\sin a\rho t}{a\rho}\quad(\rho=|\xi|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}).\tag{3.7}$$

求其傅立叶逆变换，记 $x\cdot\xi=x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3$，得

$$\begin{aligned}E(x_1,x_2,x_3,t)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{E^3}\frac{\sin a\rho t}{a\rho}e^{ix\cdot\xi}d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_{S^2}\frac{\rho\sin a\rho t}{a}e^{ix\cdot\xi}\,d\rho\,d\omega.\end{aligned}\tag{3.8}$$

这里我们已将 R^3 中的积分化成在单位球面 S^2 上的积分与关于矢径 ρ 的积分，而 $d\omega$ 为单位球面上的面积单元．在球面上以 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 方向为北极方向建立球面坐标 (θ,φ)，则有

$$x\cdot\xi=\rho r\cos\theta\quad(r=|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2})$$

及

$$d\omega=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

从而 $E(x_1,x_2,x_3,t)$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\frac{\rho\sin a\rho t}{a}e^{i\rho r\cos\theta}\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\frac{\sin a\rho t}{a}\left(\int_0^\pi e^{i\rho r\cos\theta}\rho\sin\theta\,d\theta\right)d\rho\\&=\frac{1}{4\pi^2ar}\int_0^\infty 2\sin a\rho t\cdot\sin\rho r\,d\rho\\&=\frac{1}{4\pi^2ar}\lim_{A\to\infty}\int_0^A[\cos\rho(r-at)-\cos\rho(r+at)]d\rho\\&=\frac{1}{4\pi^2ar}\lim_{A\to\infty}\left(\frac{\sin A(r-at)}{r-at}-\frac{\sin A(r+at)}{r+at}\right).\end{aligned}\tag{3.9}$$

根据黎曼-勒贝格 (Riemann-Lebesgue) 引理知：对于区间 $[a,b]$ 内的连续可微函数 $f(x)$，成立

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{\sin\nu x}{x}f(x)dx=\begin{cases}f(0),&0\in(a,b),\\0,&0\notin(a,b).\end{cases}\tag{3.10}$$

所以，对于任意具紧支集的连续可微函数 $g(r)$ 有

$$\begin{cases}\lim\limits_{A\to\infty}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin A(r-at)}{r-at}g(r)\,dr=g(at),\\[2ex] \lim\limits_{A\to\infty}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin A(r+at)}{r+at}g(r)\,dr=0,\end{cases}\tag{3.11}$$

从而由(3.9)式得

$$E(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)=\frac{\delta(r-at)}{4\pi ar},\tag{3.12}$$

其中 $r=|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$，这就是三维波动方程柯西问题的基本解.

对三维波动方程的柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right),\\[2ex] t=0:\ \ u=0,\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}=\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3),\end{cases}\tag{3.13}$$

利用基本解(3.12)可得其解应为

$$u(x,\ t)=\int_{R^3}\frac{\delta(|x-\xi|-at)}{4\pi a|x-\xi|}\varphi(\xi)\,d\xi.\tag{3.14}$$

记 $r=|\xi-x|$，将关于 ξ 的积分在以 x 为中心的球坐标中进行，并记

$$[\varphi]_r=\frac{1}{4\pi}\int_{|\xi-x|=r}\varphi(\xi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\tag{3.15}$$

为函数 φ 在球面 $|\xi-x|=r$ 上的平均值，则由(3.14)式得

$$\begin{aligned}u(x,\ t)&=\int_0^\infty\frac{1}{4\pi ar}\delta(r-at)4\pi[\varphi]_r r^2\,dr\\&=\frac{1}{a}\int_0^\infty\delta(r-at)\cdot r[\varphi]_r\,dr\\&=t[\varphi]_{r=at}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

这就是在第三章中导得的三维波动方程柯西问题解的泊松公式.

习 题

1. 验证由(3.16)式所表示的函数 $u(x,\ t)$ 确为柯西问题(3.13)的解.

索 引

一 画

三 画

四 画

五 画

六 画

七 画

八 画

九　画

十　画

十一画

十二画

十三画以上

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学物理方程
作者＝
页数＝２７４
ＳＳ号＝０
出版日期＝
Ｖｓｓ号＝６０９４４７６４